40 CÂU KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Câu 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y= - x^3 + 3x^2 - 4$

Lời giải

* Tập xác định : D= R.
* Chiều biến thiên :

Ta có : $y'= - 3x^2 + 6x = - 3x(x- 2)$

Xét phương trình $y'= 0 \Leftrightarrow - 3x (x – 2) = 0 \Leftrightarrow x= 0$ hoặc $x= 2$.

* Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	
y	$+\infty$	↘	–4	↗	0	↘	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(2 ; +\infty)$, đồng biến trên khoảng (0; 2)

Hàm số đạt cực đại tại điểm x= 2 ; giá trị cực đại của hàm số là y(2)= 0.

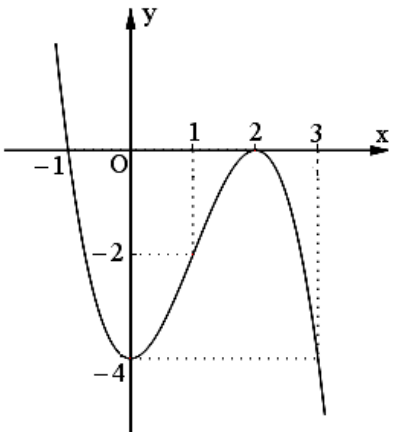
Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x= 0 ; giá trị cực tiểu của hàm số là y(0)=- 4

Giới hạn của hàm số tại vô cực : $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$

* Đồ thị :

Cho x= 1 => y =0

x= 3 => y= -4



* Điểm uốn:
$y''= - 6x+ 6 =0 \Leftrightarrow x= 1$
=> y(1) = - 2.
Đồ thị hàm số nhận điểm I(1; -2) làm điểm uốn.

Câu 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y =- x^3 + 3x^2$

Lời giải

* Tập xác định : D= R.

* Chiều biến thiên:

Ta có : $y' = - 3x^2 + 6x = - 3x(x- 2)$

Xét phương trình $y' = - 3x(x -2) = 0$ ⇔ x= 0 hoặc x= 2.

Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(2 ; +\infty)$, đồng biến trên khoảng (0;2)

Hàm số đạt cực đại tại điểm x= 2; giá trị cực đại của hàm số là y(2)= 4.

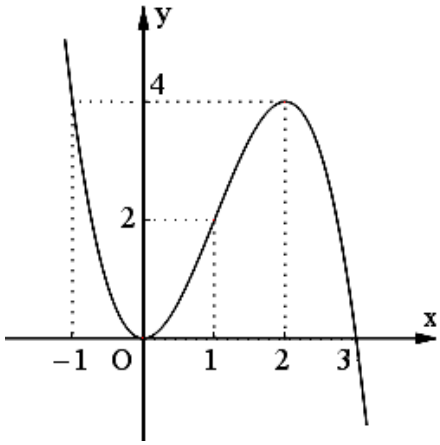
Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x = 0; giá trị cực tiểu của hàm số là y(0) = 0 .

* Đồ thị :

Cho x= 1=> y(1) = 4

x= 3 => y=0

*Điểm uốn:
Ta có: y”= - 6x+ 6 = 0
⇔ x= 1 => y (1) = 4
Vậy đồ thị nhận điểm I (1; 4) làm điểm uốn.



Câu 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x$

Lời giải.

* Tập xác định: D = R.

* Chiều biến thiên:

Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

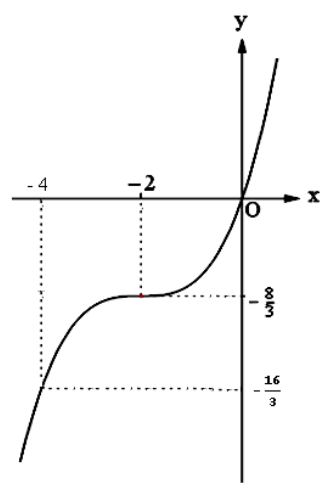
Ta có: $y' = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Hàm số đồng biến trên R và hàm số không có cực trị .

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	↗	$-\frac{8}{3}$	↗	$+\infty$

* Đồ thị : Cho x= 0 => y(0)= 0



* Điểm uốn:

y”= 2x+ 4 = 0 ⇔ x=- 2

=> y(-2) = $\frac{-8}{3}$

Vậy điểm uốn của đồ thị là $I(-2; \frac{-8}{3})$.

Câu 4. Cho hàm số y= - x^3 + $3x^2$+ 1 có đồ thị (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại A(3; 1)

Lời giải.

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị:

- Tập xác định: D= R
- Chiều biến thiên :

Ta có : y'= - $3x^2$ + 6x = - 3x(x- 2)

Xét phương trình y'= - 3x(x- 2) = 0 ⇔ x=0 hoặc x= 2.

- Giới hạn của hàm số tại vô cực : $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

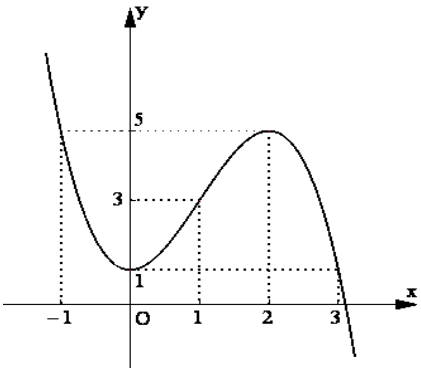
$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (0\,;2)$; $y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty\,;0) \cup (2\,;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty\,;0)$ và $(2\,;+\infty)$, đồng biến trên khoảng (0; 2) .

Hàm số đạt cực đại tại điểm x= 2; giá trị cực đại của hàm số là y(2) = 5.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x = 0 ; giá trị cực tiểu của hàm số là y(0)= 1

- Đồ thị :



Cho $x = -1 \Rightarrow y = 5$;

$x = 3 \Rightarrow y = 1$.

+ Điểm uốn :

y"= -6x+ 6= 0

⇔ x= 1 => y= 3. Do đó,điểm uốn I(1; 3).

b.Phương trình tiếp tuyến của *(C)* tại điểm A(3; 1)

Ta có; y'(3) = - 9 nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

y= y'(3). (x – 3) + 1 hay y= - 9(x- 3+ 1 ⇔ y = - 9x + 28

Câu 4. Cho hàm số y= $x^3 + 3x^2 – mx – 4$, trong đó *m* là tham số

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho với m=0.

b. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty\,;0)$.

Lời giải.

a. Khi m= 0 thì hàm số là y= $x^3 + 3x^2 – 4$.

- Tập xác định: D= R.
- Chiều biến thiên:
  - Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$
  - Bảng biến thiên:

    + Ta có: y'= $3x^2 + 6x = 3x(x+ 2)$

    Xét phương trình y'= 0 ⇔ 3x(x+ 2) = 0 ⇔ x= 0 hoặc x= - 2.

  - Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	–	0	–	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty\,;-2)$ và $(0\,;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng (-2;0).

Hàm số đạt cực đại tại điểm x= -2; giá trị cực đại của hàm số là y(-2)=0 .

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x=0; giá trị cực tiểu của hàm số là y(0)= - 4

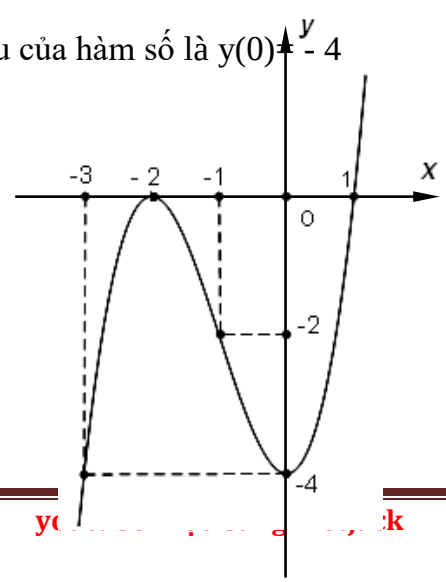
- Đồ thị :

Cho x = -3 => y= - 4

x= 1 => y=0

* Điểm uốn

Y"= 6x+ 6 =0



⇔x= - 1 => y(-1)= - 2 nên điểm uốn I(-1; -2)

b. Hàm số y= $x^3 + 3x^2 - mx - 4$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

$\Leftrightarrow y' = 3x^2 + 6x - m \geq 0$, $\forall x \in (-\infty;0)$.

Xét: $g(x) = 3x^2 + 6x - m$, $x \in (-\infty;0)$

$g'(x) = 6x + 6 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		0
g'(x)		$-$	0	$+$	
g(x)	$+\infty$	↘	$-3-m$	↗	$-m$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy:

$y' = g(x) = 3x^2 + 6x - m \geq 0$, $\forall x \in (-\infty;0) \Leftrightarrow -3 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$

Vậy khi $m \leq -3$ thì yêu cầu của bài toán được thỏa mãn .

Câu 5. Cho hàm số y= $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ có đồ thị (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số;

b. Tìm *m* để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$

Lời giải.

+Tập xác định D= R.

+ Đạo hàm y'= $6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	$-$	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng (1; 2).

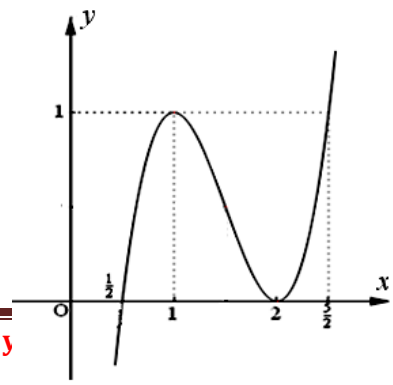
Hàm số đạt cực đại tại x= 1 và $y_{CĐ} = 1$

Hàm số đạt cực tiểu tại x= 2 và $y_{CT} = 0$

+ Đồ thị :

Điểm uốn:

y''= 12x- 18 = 0 $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$



Do đó, điểm uốn $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

b. Ta có: $2|x|^3-9x^2+12|x|=m \Leftrightarrow 2|x|^3-9x^2+12|x|-4=m-4$

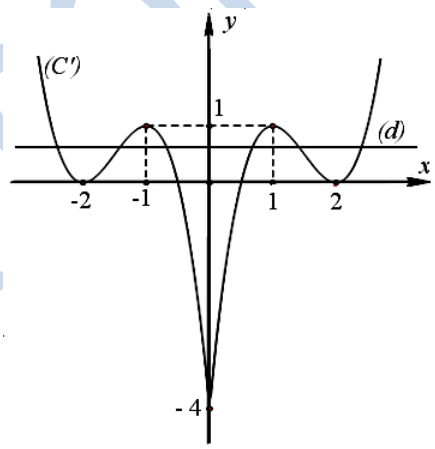
Gọi (C): y= $2x^3-9x^2+12x-4$ và $(C'): y=2|x|^3-9x^2+12|x|-4$

Ta thấy khi $x\ge 0$ thì: (C'): y= $2x^3-9x^2+12x-4$

Mặt khác hàm số của đồ thị *(C')* là hàm số chẵn nên *(C')* nhận *Oy* là trục đối xứng .

Từ đồ thị *(C)* ta suy ra đồ thị *(C')* như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị *(C)* bên phải trục *Oy*, ta được (C_1')
- Lấy đối xứng qua trục *Oy* phần (C_1'), ta được (C_2')
- $(C')=(C_1')\cup(C_2')$



Số nghiệm của phương trình:

$2|x|^3-9x^2+12|x|=m$

$\Leftrightarrow 2|x|^3-9x^2+12|x|-4=m-4$

là số giao điểm của đồ thị *(C')* và đường thẳng (d): y= m – 4

Từ đồ thị *(C')*, ta thấy yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow 0<m-4<1 \Leftrightarrow 4<m<5$

Câu 6. Cho hàm số : $y=f(x)=\frac{1}{8}(x^3-3x^2-9x-5)$ có đồ thị là (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

b. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) , biết tiếp tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Lời giải

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

* Hàm số đã cho xác định trên R.

* Xét sự biến thiên của hàm số

Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$.

Bảng biến thiên

Ta có: $y'=\frac{1}{8}(3x^2-6x-9)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc x= 3.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y		↗	0	↘		↗	$+\infty$

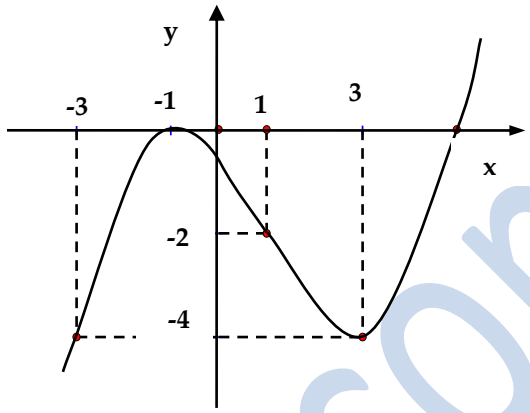
	$-\infty$ -4

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$,nghịch biến trên khoảng (-1;3)

Hàm số đạt cực đại tại điểm x= -1 ; $y_{CĐ} = 0$

Hàm số có điểm cực tiểu tại x= 3 ; y_{CT} = - 4.

* Đồ thị



Ta có: $y'' = \frac{1}{8}(6x-6)$,

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, y(1) = -2$,

Suy ra I(1; -2) là điểm uốn của đồ thị .

Giao điểm của đồ thị với trục Oy tại điểm $A\left(0;-\frac{5}{8}\right)$

Giao điểm của đồ thị với trục Ox tại hai điểm B(-1; 0); C(5; 0).

Nhận xét: Đồ thị nhận điểm uốn U(1; -2) làm tâm đối xứng.

b.Ta có $y' = \frac{3}{8}(x^2-2x-3) = \frac{3}{8}\left[(x-1)^2-4\right] \geq \frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi x= 1 => y = - 2.

Vậy tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc nhỏ nhất là:

$y = \frac{3}{2}(x-1)-2 = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$.

Câu 7. Cho hàm số y= - x^3 – x+ 2, có đồ thị là (C).

a. Khảo sát sự biến thiên (C).

b. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $\left|x^3+x-2\right| = m$ (1)

Lời giải

a. Khảo sát và vẽ (C).

+ Hàm số có tập xác định là: D= R.

+ Xét sự biến thiên của hàm số

Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$.

Bảng biến thiên

Ta có $y' = -3x^2-1 < 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên R.

Hàm số không có cực trị .

x	$-\infty$ $+\infty$
y'	–

y	$+\infty$ ↘ $-\infty$

- Điểm uốn: Ta có: $y'' = -6x \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vì y" đổi dấu khi x đi qua điểm x= 0 nên U(0;2) là điểm uốn của đồ thị

- Giao điểm của đồ thị với hai trục tọa độ.

Đồ thị cắt Oy tại điểm (0; 2) .

Phương trình y= 0 ⇔ x= 1

Nên đồ thị cắt trục Ox tại điểm (1; 0).

Nhận xét: Đồ thị nhận U(0;1) làm tâm đối xứng.

b. Xét đồ thị $(C'): y = g(x) = \left|x^3 + x - 2\right| = \left|f(x)\right|$. Khi đó số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị (C') và đường thẳng $\Delta: y = m$.

Cách vẽ y= g(x)

B1 : Giữ nguyên đồ thị (C) ứng với phần $f(x) \geq 0$ (Phần đồ thị nằm trên Ox).

B2 : Lấy đối xứng qua trục Ox đồ thị (3) phần f(x) < 0 (Phần nằm phía dưới trục Ox).

Ta có đồ thị (C')

Dựa vào đồ thị (C') ta có :

- Nếu $m < 0 \Rightarrow \Delta$ và (C') không cắt nhau thì (1) vô nghiệm
- Nếu $m = 0 \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại một điểm thì (1) có một nghiệm
- Nếu $m > 0 \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại hai điểm thì (1) có hai nghiệm.

Câu 8. Cho hàm số y= $x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm m để phương trình $x^3 - 3x^2 = m$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

c. Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị (C'): $y = g(x) = |x|^3 - 3x^2 + 2$.

d. Biện luận số nghiệm của phương trình : $-|x|^3 + 3x^2 + m = 0 \quad (2)$.

Lời giải

a. Khảo sát và vẽ (C).

* Hàm số có tập xác định là D = R.

* Sự biến thiên của hàm số

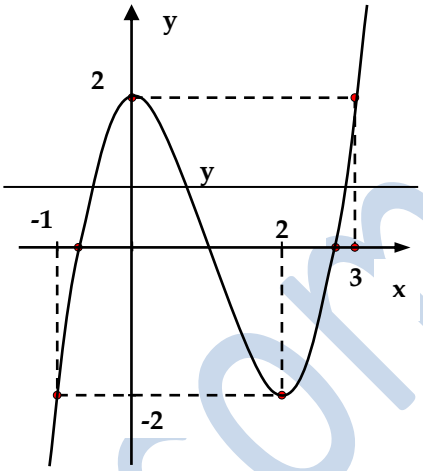
Giới hạn của hàm số tại vô cực : $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên

Ta có: y'= $3x^2 - 6x = 0$ ⇔ x = 0 hoặc x= 2.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.
Hàm số đạt cực đại tại điểm x= 0; $y_{CĐ} = 2$
và hàm số đạt cực tiểu tại điểm x= 2; $y_{CT} = -2$.
* Đồ thị



- Điểm uốn: Đạo hàm cấp hai của hàm số là: $y'' = 6x - 6 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta thấy y" đổi dấu khi x qua điểmx= 1.
Vậy U(1; 0) là điểm uốn của đồ thị.

- Giao điểm của đồ thị với trục tọa độ

Giao điểm của đồ thị với trục Oy là (0 2)
Do đó, đồ thị cắt Ox tại ba điểm (1; 0), $(1 \pm \sqrt{3};0)$.
* Chọn x= 3 => y = 2; x= -1 => y= -2.
Nhận xét: Đồ thị nhận U(1;0) làm tâm đối xứng.

b. Ta có phương trình:
$x^3 - 3x^2 = m \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = m + 2$.
Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng y= m+ 2 cắt (C) tại ba điểm phân biệt khi -2< m+ 2 < 2 hay – 4 < m< 0.
Vậy – 4<m< 0 là những giá trị cần tìm.

c. Ta có hàm số $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$ là hàm số chẵn nên đồ thị (C') nhận trục Oy là trục đối xứng $\Rightarrow$ để vẽ đồ thị (C') ta chỉ cần vẽ (C') nằm phia bên trái hoặc bên phải của trục Oy rồi lấy đối xứng qua Oy ta được phần còn lại.
Mặt khác với $x \ge 0 \Rightarrow g(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow (C) \equiv (C')$.
Vậy dựa vào đồ thị (C), ta vẽ đồ thị (C') như sau:
* Giữ nguyên phần bên phải trục Oy của đồ thị (C).
* Lấy đối xứng qua trục Oy phần vừa vẽ ở trên ta có được đồ thị của (C').

d. Ta có phương trình (2) $\Leftrightarrow |x|^3 - 3x^2 + 2 = m - 2$
$\Rightarrow$ số nghiệm của phương trình (2) chính là số giao điểm của hai đồ thị
$\begin{cases} y = |x|^3 - 3x^2 + 2 & (C') \\ y = m - 2 & (\Delta) \end{cases}$. Dựa vào đồ thị (C'), ta có:

- $m - 2 < -2 \Leftrightarrow m < 0 \Rightarrow \Delta$ không cắt đồ thị (C') nên phương trình (2) vô nghiệm.
- $\left[\begin{array}{l} m - 2 = -2 \\ m - 2 > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m > 4 \end{array}\right. \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại hai điểm phân biệt nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt.
- $m - 2 = 2 \Leftrightarrow m = 4 \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại ba điểm phân biệt nên phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt.

- $-2 < m-2 < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 4 \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại bốn điểm phân biệt nên phương trình (2) có bốn nghiệm phân biệt.

Câu 9. Cho hàm số y= $2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C).

a. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng y= 36 x+ 1

b. Tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt : $|x|^3 - \frac{3}{2}x^2 + m = 0$.

c. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $|2x^2 - x - 1| = \frac{m}{|x-1|}$.

Lời giải

a. Gọi M(x_0 ; y_0) là tiếp điểm.

Ta có : $y'(x_0) = 36 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3, x_0 = -2$

- x_0= - 2 thì y_0= - 27 nên phương trình tiếp tuyến y= 36x+ 45
- x_0 = 3 thì y_0 = 28 nên phương trình tiếp tuyến y = 36x+ 80.

b. Phương trình $\Leftrightarrow 2|x|^2 - 3x^2 + 1 = -2m + 1$,số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị : $\begin{cases} (C'): y = 2|x|^3 - 3x^2 + 1 \\ \Delta; y = -2m + 1 \end{cases}$

Dựa vào đồ thị (C') ta có $0 < -2m + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

c. Điều kiện : $x \neq 1$

Phương trình $\Leftrightarrow |2x^3 - 3x^2 + 1| = m$,số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị $\begin{cases} (C_1): y = |2x^3 - 3x^2 + 1| \\ d: y = m \end{cases}$

Dựa vào đồ thị (C_1) suy ra :

- m<0 thì phương trình vô nghiệm
- m = 0 thì phương trình có một nghiệm (loại nghiệm x= 1)
- 0<m< 1 thì phương trình có đúng bốn nghiệm
- m= 1 thì phương trình có đúng ba nghiệm
- m> 1 thì phương trình có đúng hai nghiệm.

Câu 10. Cho hàm số y= $x^3 - 3mx^2$ (C), với tham số thực m. Lấy 2 điểm A và B thuộc đồ thị.Giả sử tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau.

a. Chứng minh rằng trung điểm I của AB nằm trên (C).

b. Tìm giá trị của m để phương trình đường thẳng AB là y= -x- 1. Khi đó viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại A.

Lời giải

a.Ta có: y'= $3x^2$ - 6mx.

Lấy A(a; $a^3 - 3ma^2$); B(b; $b^3 - 3mb^2$) $(a \neq b)$
Tiếp tuyến tại A và B là song song nên:
$3a^2 - 6ma = 3b^2 - 6mb \Leftrightarrow 3(a^2 - b^2) - 6m(a - b) = 0$
$\Leftrightarrow 3(a-b).[a + b - 2m] = 0$
$\Leftrightarrow a + b = 2m$ (vì $a \neq b$)

Do I là trung điểm AB nên: $x_I = \dfrac{a+b}{2} = m$

$$y_I = \frac{a^3 + b^3 - 3m(a^2 + b^2)}{2} = -2m^3 = m^3 - 3m^3 = x_I^3 - 3mx_I^2 .$$

Vậy I thuộc (C).
b. Ta có $I \in AB \Rightarrow -2m^3 = -m - 1 \Leftrightarrow m = 1$
Khi đó ta có: $y'(x_A) = -1 \Leftrightarrow 3x_A^2 - 6x_A + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x_A = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3} \Rightarrow y_A = \frac{12 \pm 5\sqrt{6}}{9} .$$

Phương trình tiếp tuyến tại A : $y = -\left(x - \dfrac{3 \pm \sqrt{6}}{3}\right) + \dfrac{12 \pm 5\sqrt{6}}{9}$

Câu 11: Cho hàm số y= $x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị là (C)
a.Tìm phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x = 3.
b. Tìm phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.
Lời giải
a. Ta có y'= $3x^2 - 6x$.
Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm có hoành độ x = 3:
y= y'(3). (x- 3)+ y(3)
Mà y'(3) = 3. $3^2 - 6.3 = 9$ và y(3) = 4.
Suy ra phương trình d: y = 9(x – 3) + 4 = 9x – 23 .
b. Hệ số góc của tiếp tuyến của (C):
k= y'(x)= $3x^2 - 6x = 3(x-1)^2 - 3 \geq -3$
Do đó, hệ số góc nhỏ nhất là là $k_{min} = -3$.
Dấu "=" xảy ra khi x- 1= 0 hay x= 1.
Khi đó, phương trình tiếp tuyến cần tìm là:
y= y'(1). (x- 1) + y(1) hay y= -3(x- 1)+ 2 = - 3x+ 5.

Câu 12: Cho hàm số $y = -\dfrac{x^3}{3} + 2(m+1)x^2 - 3(m+1)x + 1$ (1) (m là tham số).
a. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số (1) nghịch biến trên R.
b. Tìm các giá trị của tham số m để trên đồ thị của hàm số (1) tồn tại một cặp điểm M , N (M khác N) đối xứng với nhau qua gốc tọa độ O.
Lời giải
a. Đạo hàm y'= - x^2 + 4(m+1) x - 3(m+ 1) .

Hàm số (1) nghịch biến trên R $\Leftrightarrow \forall x \in R, y' \le 0 \Leftrightarrow \Delta' = 4(m+1)^2 - 3(m+1) \le 0$

$$\Leftrightarrow (m+1)(4m+1) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le m \le -\frac{1}{4}.$$

b. Ta có M và N đối xứng qua gốc tọa độ O $\Leftrightarrow \begin{cases} M(x_0; y_0) \\ N(-x_0; -y_0) \end{cases}$.

M và N thuộc đồ thị của hàm số (1) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y_0 = -\frac{x_0^3}{3} + 2(m+1)x_0^2 - 3(m+1)x_0 + 1 \quad (2) \\ -y_0 = \frac{x_0^3}{3} + 2(m+1)x_0^2 + 3(m+1)x_0 + 1 \quad (3) \end{cases}$$

Cộng hai phương trình (2) và (3) ,vế với vế ta được : $4(m+1)x_0^2 + 2 = 0$ (4)

M , N tồn tại khi và chỉ khi (4) có nghiệm $\Leftrightarrow 4(m+1) < 0$ hay $m < -1$.

Câu 13. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$, trong đó m là tham số .

a. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

b. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

a. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$y' = -3x^2 - 6x + m \le 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \le 3x^2 + 6x = f(x)$

Hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x$ liên tục trên $(0; +\infty)$

Ta có $f'(x) = 6x + 6 > 0$ với mọi $x > 0$ và $f(0) = 0$. Từ đó ta được : $m \le 0$.

b. Giả sử đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm có hoành độ x_1; x_2; x_3 theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng,

suy ra $x_1 + x_3 = 2x_2$ và x_1; x_2; x_3 là nghiệm của phương trình: $x^3 + 3x^2 - mx - 4 = 0$ (*)

Nên ta có: $x^3 + 3x^2 - mx - 4 = (x - x_1).(x - x_2).(x - x_3)$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -3 \Rightarrow 3x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -1$ thay vào (*) ta có được:

$-2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

* Với m= 2 thì (*) trở thành:

$x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = -1 \pm \sqrt{5}$

Ta thấy đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm lập thành cấp số cộng.

Vậy m= 2 là giá trị cần tìm.

Câu 14. Cho hàm số $y = 2x^3 + (m-1)x^2 + (m+2)x + 1$ (1).

a. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng (d): $y = 9x - 3$.

b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và điểm cực tiểu có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{6}$.

Lời giải

a. Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng (d): y = 9x – 3 thì hệ số góc của Δ là k= 9

$\Leftrightarrow y'(x_0)=9 \Leftrightarrow 6x_0^2+3=9 \Leftrightarrow x_0^2=1 \Leftrightarrow x_0=\pm 1.$

(x_0 là hoành độ tiếp điểm của Δ với (C))

Phương trình tiếp tuyến Δ có dạng y= k(x- x_0) + y_0

* Khi x_0= 1 thì phương trình của Δ là y= 9(x- 1)+ 6 = 9x – 3 phương trình này bị loại vì khi đó $d \equiv \Delta$

* Khi x_0= - 1 thì phương trình d là y= 9(x+ 1) – 4= 9x + 5.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là y= 9x+ 5

b. Đạo hàm y'= $6x^2$ + 2(m -1)x + m+ 2

Đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và điểm cực tiểu có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{6}$.

$\Leftrightarrow$ Phương trình y' =0 có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 lớn hơn $\frac{1}{6}$.

* Phương trình y'= 0 có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=(m-1)^2-6(m+2)=m^2-8m-11>0$

$\Leftrightarrow 4-3\sqrt{3}<m<4+3\sqrt{3}$ (*).

Khi đó hai nghiệm của phương trình y'= 0 là

$$x_1=\frac{1-m-\sqrt{m^2-8m-11}}{6},\ x_2=\frac{1-m+\sqrt{m^2-8m-11}}{6}.$$

Vì $x_1 < x_2$ do đó x_1; x_2 đều lớn hơn $\frac{1}{6}$ khi và chỉ khi $\frac{1-m-\sqrt{m^2-8m-11}}{6}>\frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow \sqrt{m^2-8m-11}<-m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<4-3\sqrt{3} \vee m>4+3\sqrt{3} \text{ (do (a))} \\ -m>0 \\ m^2-8m-11<m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<4-3\sqrt{3} \\ m>-\frac{11}{8} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{11}{8}<m<4-3\sqrt{3}.$$

Câu 15. Cho hàm số y= $-x^3$ +$3x^2$ + 9x - 1 có đồ thị là (C).

a. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.

b. Tìm m để đường thẳng d : y= (2m- 1)x- 1 cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A(0 ; -1); B; C sao cho $BC=\sqrt{82}$.

c. Tìm những điểm nằm trên (C) mà qua đó vẽ được duy nhất một tiếp tuyến đến (C).

Lời giải

a. Ta có y'= - $3x^2$ + 6x + 9 = -3(x- 1)^2 + 12 $\le$12

Do đó,tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất là k_{min} = 12.

Đẳng thức xảy ra khi x= 1.

Ta có : y(1)= 10 và y'(1) = 12 nên phương trình tiếp tuyến cần tìm :

y= 12 (x- 1) + 10 hay y= 12x - 2

b. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C).

$-x^3 + 3x^2 + 9x - 1 = (2m-1)x - 1$

$\Leftrightarrow x.(x^2 - 3x + 2m - 10) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3x + 2m - 10 = 0; (*) \end{array}\right.$$

Đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt khi (*) có hai nghiệm phân biệt x_1 ; x_2 khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 49 - 8m > 0 \\ 2m - 10 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{49}{8} \\ m \neq 5 \end{cases}.$$

Khi đó : $B(x_1; (2m-1)x_1 - 1)$; $C(x_2; (2m-1)x_2 - 1)$

Suy ra $BC^2 = \left[1 + (2m-1)^2\right](x_1 - x_2)^2 = (4m^2 - 4m + 2)(49 - 8m)$

Nên $BC = \sqrt{82} \Leftrightarrow (2m^2 - 2m + 1)(49 - 8m) = 41$

$$8m^3 - 57m^2 + 53m - 4 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(8m^2 - 49m + 4) = 0 \Leftrightarrow m = 1, m = \frac{49 \pm \sqrt{2273}}{16}.$$

c. Gọi $A(a; -a^3 + 3a^2 + 9a - 1) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(x_0; y_0)$ có phương trình :

$$y = (-3x_0^2 + 6x_0 + 9)(x - x_0) - x_0^3 + 3x_0^2 + 9x_0 - 1$$

$$A \in \Delta \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 - 9a + (-3x_0^2 + 6x_0 + 9)(a - x_0) - x_0^3 + 3x_0^2 + 9x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - x_0)^2(a + 2x_0 - 3) = 0 \Leftrightarrow a = x_0, a = 3 - 2x_0$$

Để từ A vẽ đến (C) đúng một tiếp tuyến khi và chỉ khi :

$x_0 = 3 - 2x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$

Suy ra, A (1; 10) là điểm cần tìm.

Câu 16. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số;

b. Dùng đồ thị *(C)*, hãy biện luận theo m số nghiệm thực của phương trình

$$x^4 - 2x^2 - 1 = m \quad (*)$$

Lời giải.

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị:

- Tập xác định: D= R.
- Chiều biến thiên :

Ta có : $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

- Bảng biến thiên :

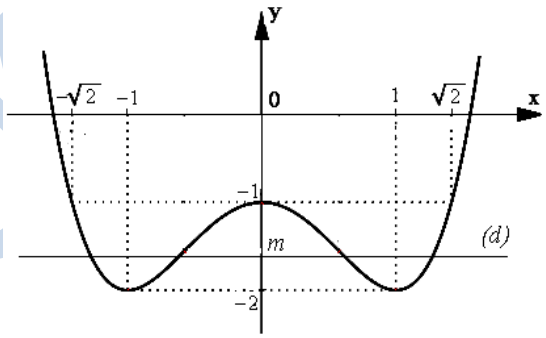
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và (0; 1), đồng biến trên các khoảng (-1; 0) và $(1;+\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm x= 0 ; giá trị cực đại của hàm số là y(0) = - 1.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=\pm 1$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 1)=-2$

- Đồ thị : Cho $y=-1 \Rightarrow x=0$; $x=\pm\sqrt{2}$.



b . Biện luận theo *m* số nghiệm thực của phương trình: $x^4 - 2x^2 - 1 = m$

Số nghiệm của (*) là số giao điểm của (C) và đường thẳng d: y= m.

Dựa vào đồ thị, ta thấy :

+ Khi m< -2 thì (*) vô nghiệm.

+ Khi $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m>-1 \end{array}\right.$ thì (*) có 2 nghiệm.

+ Khi -2< m< -1 thì (*) có 4 nghiệm.

+ Khi m= -1 thì (*) có 3 nghiệm.

Câu 17. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ có đồ thị (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số m= 3.

b. Xác định m để đồ thị của hàm số có cực tiểu mà không có cực đại.

Lời giải.

a. Khi m=3 thì hàm số là : $y=\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$.

+ Tập xác định : D= R.
+ Chiều biến thiên :

Ta có : $y' = 2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x\left(x^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Giới hạn của hàm số tại vô cực : $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3	↗	$+\infty$

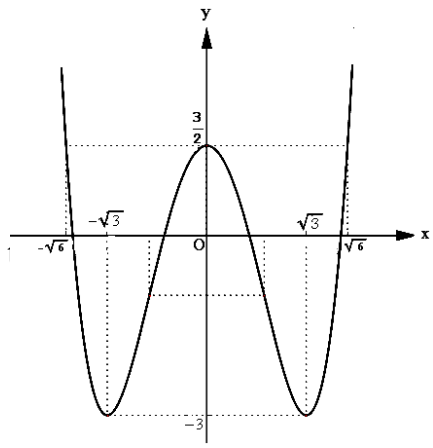
Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3}\,;0\right)$ và $\left(\sqrt{3}\,;+\infty\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty\,;-\sqrt{3}\right)$ và $\left(0\,;\sqrt{3}\right)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm x= 0 ; giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = \frac{3}{2}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm\sqrt{3}$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y\left(\pm\sqrt{3}\right) = -3$.

+ Đồ thị :

- Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn, nên đồ nó nhận trục tung làm trục đối xứng .
- Đồ thị (hình vẽ):



b. Tập xác định: D= R

Đạo hàm: $y' = 2x^3 - 2mx = 2x(x^2 - m)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m; (*) \end{array}\right.$$

Hàm số có cực tiểu mà không có cực đại khi và chỉ khi y' = 0 có một nghiệm duy nhất và *y'* đổi dấu từ âm sang dương khi *x* đi qua nghiệm đó

⇔ Phương trình (*) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép x= 0 $\Leftrightarrow m \le 0$

Vậy giá trị cần tìm là: $m \le 0$.

Câu 18. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có đồ thị (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số khi m= 1;

b. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho OA = BC; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

Lời giải.

a.

+ Tập xác định D = R.

+ Sự biến thiên :

Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{2}$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

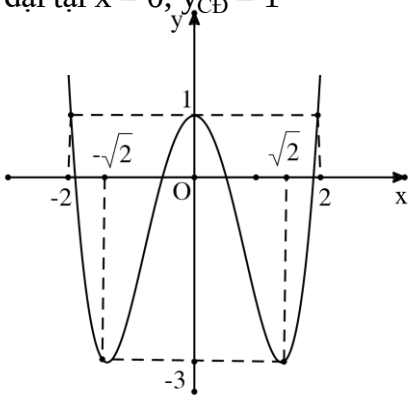
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$; đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{2}; 0\right)$ và $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$; $y_{CT} = -3$, đạt cực đại tại x = 0; $y_{CĐ} = 1$

- Đồ thị:



b. Xét $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m$ (C)

$\Rightarrow y' = 4x^3 - 4(m + 1)x$

Đồ thị của hàm số (C) có ba cực trị khi và chỉ khi phương trình y' = 0 có ba nghiệm phân biệt.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 4x[x^2 - m - 1] = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 = m + 1$

Vì thế để thỏa mãn điều kiện trên thì phương trình $x^2 = m + 1$

Cần có hai nghiệm phân biệt khác 0. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi :

$$m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1 \qquad (1)$$

Kết luận thỏa mãn (1), (C) có ba cực trị tại các điểm

$A(0, m), B\left(-\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right), C\left(\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right)$

Lúc đó: $OA = OB \Leftrightarrow OA^2 = BC^2$ (do OA > 0 ; BC > 0)

$$\Leftrightarrow m^2 = 4(m + 1) \Leftrightarrow m^2 - 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

Câu 19. Cho hàm số $y= x^4 - mx^2 + m - 1$ (1) có đồ thị (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số khi m = 8;

b. Xác định m sao cho đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

Lời giải.

a. Khi m= 8; hàm số đã cho trở thành: $y=x^4 - 8x^2 + 7$.

+ Tập xác định :D = R

+ Chiều biến thiên :

Ta có : $y'=4x^3 -16 x= 4x(x^2 - 4)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$$

Giới hạn của hàm số tại vô cực : $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty.$

Bảng biến thiên :

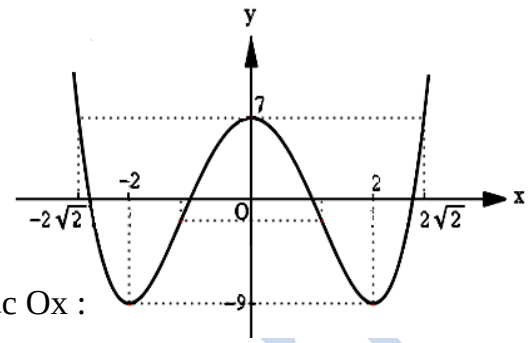
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	$+\infty$	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng (-2; 0) và $(2 ; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và (0;2).

Hàm số đạt cực đại tại điểm x= 0 ; giá trị cực đại của hàm số là y(0)= 7.

Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 2$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 2) = -9$.

Đồ thị (hình vẽ):



Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn nên

đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng.

b.Gọi (C): $y = x^4 - mx^2 + m - 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C)và trục Ox :

$x^4 - mx^2 + m - 1 = 0$ (1).

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, (1) trở thành: $t^2 - mt + m - 1 = 0$ (2).

Yêu cầu bài toán trở thành phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 4 > 0 \\ S = m > 0 \\ P = m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2. \end{cases}$$

Câu 20. Cho hàm số $y = x^4 + 3(m+1)x^2 + 3m + 2$, có đồ thị là (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) khi m=1.

b. Tìm các giá trị của m để (C) có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông.

Lời giải

a. Với m= 1, ta có (C) : $y = x^4 + 6x^2 + 5$

+ Hàm số có tập xác định là D= R.

+ Xét sự biến thiên của hàm số

Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên

Ta có: $y' = 4x^3 + 12x = 4x.(x^2 + 3)$

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

X	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		–	0	+	
Y	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x= 0 với giá trị cực tiểu y(0)= 5. Hàm số không có cực đại.

* Đồ thị

Đồ thị cắt Oy tại điểm (0;5), đồ thị không cắt Ox. Đồ thị đi qua các điểm (1;12) ; (-1; 12).

Nhận xét: Hàm số đã cho là hàm số chẵn nên (C) nhận Oy làm trục đối xứng.

b. Ta có : y'= $4x^3 + 6(m+1)x = 2x.(2x^2 + 3m+3)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2=-3m-3 \end{array}\right.$$

Hàm có ba cực trị khi và chỉ khi phương trình y'= 0 có 3 nghiệm phân biệt:

⇔ - 3m- 3> 0 ⇔m < - 1 .

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là: A(0;3m+ 2)

$B\left(\sqrt{\frac{-3m-3}{2}};k\right)$, $C\left(-\sqrt{\frac{-3m-3}{2}};k\right)$, trong đó $k=-\frac{9}{4}(m+1)^2+3m+2$.

Ta thấy AB= AC nên tam giác ABC vuông (chỉ vuông tại A)

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow \frac{3(m+1)}{2}+(k-3m-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(m+1)}{2}+\frac{81}{16}(m+1)^4=0 \Leftrightarrow 27(m+1)^3=-8 \Leftrightarrow m=-\frac{5}{3} \text{(thỏa mãn } m<-1\text{)}.$$

Vậy $m=-\frac{5}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 21. Cho hàm số y= $x^4 - 2x^2$ - 2 có đồ thị là (C).

a. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng x+ 24y+10=0.

b.Tìm a để Parabol (P): y= $2x^2$ + a tiếp xúc với (C).

Lời giải

a. Gọi M(x_0; y_0) là tiếp điểm.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng x+ 24y+ 10 = 0

$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{24}x-\frac{10}{24}$ nên ta có $y'(x_0)=24 \Leftrightarrow x_0^3-x_0-6=0$

⇔ x_0= 2 => y_0= 6

Vậy phương trình tiếp tuyến: y= 24 (x- 2) + 6 = 24x - 42.

b. Để (P) tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^4-2x^2-2=2x^2+a \\ 4x^3-4x=4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-2x^2-2=2x^2+a \\ 4x(x^2-2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4-4x^2-2=a \\ x=0, x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$ => a= -2; a= - 6

Câu 22. Cho hàm số y= $-x^4 + 6x^2$ - 5 có đồ thị (C)

a.Khảo sát sự biến thiên đồ thị (C).

b.Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các điểm uốn.

c.Tìm m để phương trình $(x^2-5)\left|x^2-1\right|=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Lời giải

a.

+ Hàm số có tập xác định là D= R.

+ Xét sự biến thiên của hàm số

* Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$.

* Bảng biến thiên

Ta có: $y' = -4x^3 + 12x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	0	–	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-5	↗	4	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-\sqrt{3})$ và $(0;\sqrt{3})$; nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\sqrt{3};0\right)$ và $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x= 0; y_{CT} = - 5

Hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \pm\sqrt{3}$, $y\left(\pm\sqrt{3}\right) = 4$.

+ Đồ thị

- Điểm uốn: $y'' = -12x^2 + 12 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Và y" đổi dấu khi x đi qua hai điểm $x = \pm 1$ nên (C) có hai điểm uốn I(1; 0) và U(-1;0).

- Giao của (C) với trục tọa độ: (C) cắt Oy tại điểm (0; -5) và (C) cắt Ox tại 4 điểm $(\pm 1;0)$ và $(\pm\sqrt{5};0)$

Nhận xét: Hàm số đã cho là hàm số chẵn nên (C) nhận trục Oy làm trục đối xứng.

b.

+ Tiếp tuyến của (C) tại điểm uốn I(1; 0) là:

y= y'(1). (x -1) + 0 = 8x - 8.

+ Tiếp tuyến của (C) tại điểm uốn U(- 1; 0) là:

y= y'(-1). (x+ 1) + 0 = - 8x - 8.

c. Số nghiệm của phương trình đã cho chính là số giao điểm của đường thẳng y= m với đồ thị (C'): $y = (x^2 - 5)\left|x^2 - 1\right|$

$(C') \equiv (C)$ khi $-1 \le x \le 1$, (C') đối xứng với (C) qua Ox khi x< -1 hoặc x> 1 .

Theo đồ thị ta thấy yêu cầu bài toán ⇔ - 4< m< 0.

Câu 23. Cho hàm số $y=x^4 - 2(m+1).x^2 + 2m+1$ có đồ thị là (C)

a. Tìm giá trị của m để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D sao cho AB= BC= CD.

b. Tìm m để (C) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

Lời giải

a. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox :

$x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ ta có: $t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$ (2)
Để (C) cắt Ox tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 > 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = 2m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Khi đó: $A(-\sqrt{t_2};0), B(-\sqrt{t_1};0), C(\sqrt{t_1};0), D(\sqrt{t_2};0)$

Nên $AB = BC = CD \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$

Mà $\begin{cases} t_1t_2 = 2m+1 \\ t_1 + t_2 = 2m+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1^2 = \dfrac{2m+1}{9} \\ t_1 = \dfrac{m+1}{5} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{(m+1)^2}{25} = \dfrac{2m+1}{9}$

$\Leftrightarrow 9m^2 - 32m - 16 = 0 \Leftrightarrow m = 4, m = -\dfrac{4}{9}$

Thử lại ta thấy cả hai giá trị này đều thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $m = 4, m = -\dfrac{4}{9}$ là những giá trị cần tìm.

b.Ta có: $y' = 4x(x^2 - m - 1)$
Hàm số có ba cực trị khi m>- 1. Khi đó (C) có ba điểm cực trị là

$A(0;2m+1),\ B(\sqrt{m+1};-m^2),\ C(-\sqrt{m+1};-m^2)$

Tam giác ABC vuông $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$
$\Leftrightarrow -(m+1) + (m+1)^4 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.
Vậy m=0 là giá trị cần tìm.
Câu 24. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m - 5$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và ba điểm này là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 32.
Lời giải
Đạo hàm $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi y' đổi dấu ba lần.
Hay phương trình y'= 0 có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$
Khi đó tọa độ ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A(0;2m-5),\ B\left(\sqrt{m};-m^2+2m-5\right),\ C\left(-\sqrt{m};-m^2+2m-5\right)$

Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.d(A,BC)$.

$BC = |x_B - x_C| = 2\sqrt{m}$, $d(A,BC) = |y_A - y_B| = m^2$.

$S_{ABC} = 32 \Leftrightarrow \frac{1}{2}2\sqrt{m}.m^2 = 32 \Leftrightarrow m^5 = 32^2 \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa mãn điều kiện m > 0).

Vậy m= 4.

Câu 25. Cho hàm số $y=x^4 + 2(m+ 1)x^2 – 4m – 4$ (1).

a. Tìm các điểm cố định của đồ thị hàm số đã cho.

b. Xác định các giá trị của tham số m để hàm số chỉ có điểm cực tiểu mà không có điểm cực đại .

c. Cho hai điểm A(0; -16) và B(-1; -8). Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải

a. Tìm các điểm cố định của đồ thị hàm số (1).

Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của (C). Thế thì

$\forall m \in R, M(x_0;y_0) \in (C) \Leftrightarrow \forall m \in R, y_0 = x_0^4 + 2(m+1)x_0^2 - 4m - 4$ (*)

$\Leftrightarrow \forall m \in R, 2(x_0^2 - 2)m + x_0^4 + 2x_0^2 - 4 - y_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\sqrt{2} \\ y_0 = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_0 = \sqrt{2} \\ y_0 = 4 \end{cases}$.

Vậy (C) có hai điểm cố định là ($A(-\sqrt{2};4)$, $B(\sqrt{2};4)$.

b. Xác định các giá trị của tham số m để hàm số chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

Ta có y' = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -(m+1) \end{array}\right.$.

Hàm số chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại $\Leftrightarrow m \geq -1$.

c. Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

Diện tích tam giác MAB.

$$S = \frac{1}{2}AB.d(M, AB).$$

Vì dộ dài AB không đổi do đó S nhỏ nhất khi và chỉ khi d(M,AB) nhỏ nhất.

Phương trình đường thẳng AB:

$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y+16}{8} \Leftrightarrow 8x - y - 16 = 0$.

$M \in (C) \Rightarrow M(x_0; x_0^4 + 2x_0^2 - 4)$.

$d(M, AB) = \frac{|8x_0 - y_0 - 16|}{\sqrt{8^2 + 1^2}} = \frac{|8x_0 - x_0^4 - 2x_0^2 + 4 - 16|}{\sqrt{65}} = \frac{|-x_0^4 - 2x_0^2 + 8x_0 - 12|}{\sqrt{65}}$

Vì $-x_0^4 - 2x_0^2 + 8x_0 - 12 = -x_0^4 - 2[(x_0 - 2)^2 + 2] \leq 0$ do đó $d(M, AB) = \frac{x_0^4 + 2x_0^2 - 8x_0 + 12}{\sqrt{65}}$

Gọi $f(x_0) = x_0^4 + 2x_0^2 - 8x_0 + 12$, $x_0 \in R$.

$f'(x_0) = 4x_0^3 + 4x_0 - 8 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$.

Từ bảng biến thiên trên suy ra min $f(x_0) = 7$ đạt được khi và chỉ khi $x_0 = 1$.

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất khi M(1; -1).

Câu 26. Cho hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$, trong đó *m* là tham số thực.

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với m= 1

b. Với giá trị nào của *m* thì hàm số nghịch biến trên khoảng $-\infty;1$

Lời giải.

a. Khi m = 1 thì hàm số là: $y=\frac{x+4}{x+1}$.

+ Tập xác định: D= R\ {-1}

+ Chiều biến thiên:

Ta có : $y'=\frac{-3}{(x+1)^2}<0$, $\forall x\neq -1$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1),(-1;+\infty)$

Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực và các đường tiệm cận:

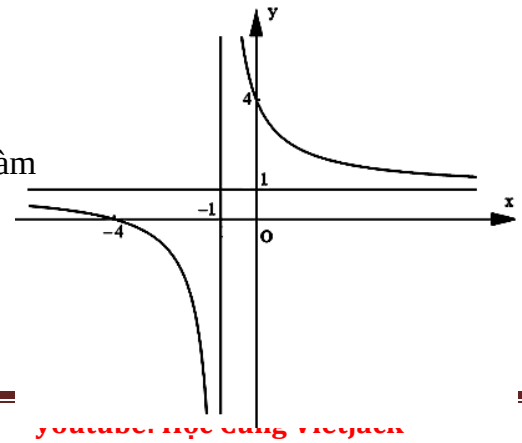
+ Ta có: $\lim\limits_{x\to -1^-} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} y=+\infty$, do đó đường thẳng x= -1 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

+ Ta có: $\lim\limits_{x\to -\infty} y=\lim\limits_{x\to +\infty} y=1$, nên đường thẳng y= 1 là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho .

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

- Đồ thị : (hình vẽ)



y= 0=> x= - 4; x= 0 => y= 4 tức là đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm (-4; 0), cắt trục tung tại (0; 4).

- Đồ thị của hàm số nhận giao điểm I(-1;1) của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng .

b. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên khoảng $-\infty;1$

Tập xác định: D= R\{-m}

$$y' = \frac{m^2-4}{(x+m)^2}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'<0, \forall x \in (-\infty;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ x=-m \notin (-\infty;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ -m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ m \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m\le -1.$$

Vậy giá trị cần tìm là: $-2<m\le -1$.

Câu 27. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

a.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;

b.Tìm *m* để đường thẳng (d) y= -x+ m cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị

+ Tập xác định: D= R\ {1}

+ Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}<0$, $\forall x \in D$.

  Suy ra, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

- Cực trị: Hàm số không có cực trị.

- Giới hạn : $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 2$; $\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty$.

  Suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng x = 1, và một tiệm cận ngang là đường thẳng y = 2.

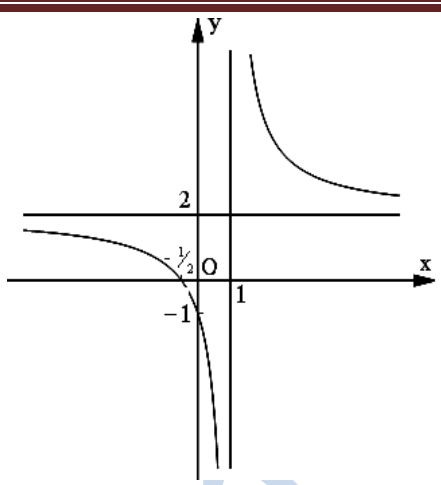
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	2 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

- Đồ thị :

Đồ thị cắt trục tung tại A(0; -1), cắt trục hoành tại $B\left(-\frac{1}{2};0\right)$

Đồ thị nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận I(1;2) làm tâm đối xứng .



b. Đường thẳng (d): y= -x + m cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi:

$\frac{2x+1}{x-1}=-x+m$ có hai nghiệm phân biệt

⇔ x^2 – (m- 2)x+ m+ 1=0 có hai nghiệm phân biệt khác 1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=(m-2)^2-4(m+1)>0\\ 1^2-(m-2).1+m+1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-8m>0\\ 4\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0\\ m>8\end{array}\right.$$

Vậy với m< 0 hoặc m> 8 thì đường thẳng (d) cắt đồ thì (C) tại hai điểm phân biệt.

Câu 28. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;

b. Tìm k để đường thẳng y = kx + 2k + 1 cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Lời giải.

a. Xét hàm số y = $\frac{2x+1}{x+1}$ (C)

Tập xác định : D= R\{ - 1}.

Sự biến thiên :

- Chiều biến thiên : $y'=\frac{1}{(x+1)^2}>0, \forall x\in D$

  Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty\,;-1)$ và $(-1\,;+\infty)$

- Giới hạn và tiệm cận:

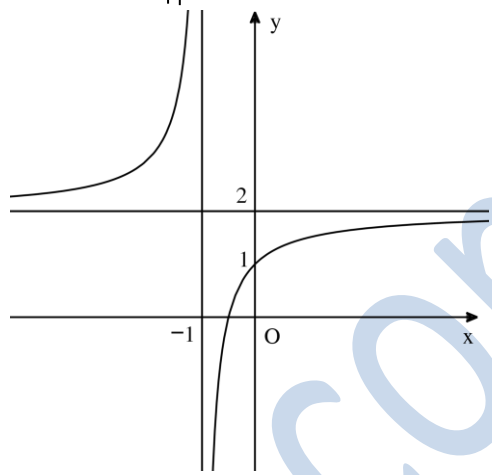
  $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=2;$ tiệm cận ngang: y = 2.

  $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=+\infty,\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} y=-\infty;$ tiệm cận đứng : x = –1

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	‖		
y	2 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

- Đồ thị :



b. Gọi (d) là đường thẳng y = kx + 2k + 1. Khi đó hoành độ giao điểm của (d) và (C) là nghiệm của phương trình : $kx+2k+1=\dfrac{2x+1}{x+1}$

$\Leftrightarrow$(x + 1)(kx + 2k +1) = 2x + 1(do x = –1 không là nghiệm)

$\Leftrightarrow kx^2 + (3k - 1)x + 2k = 0$ (1)

Để (d) và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B thì (1) cần có hai nghiệm phân biệt. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ (3k-1)^2 - 8k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - (k+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < 3 - 2\sqrt{2} \vee k > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi k thỏa mãn (2) ta có: A(x_1 ; kx_1+ 2k+1) và B(x_2 ; kx_2+ 2k+ 1) ở đây x_1 ; x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1).

Ta có : d(A, Ox) = d(B, Ox) $\Leftrightarrow |kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} kx_1 + 2k + 1 = kx_2 + 2k + 1 \\ kx_1 + 2k + 1 = -kx_2 - 2k - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k(x_1 - x_2) = 0 \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \text{ (do } k \neq 0) \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \quad (\text{do } x_1 \neq x_2)$$

Theo định lí Viet, ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{1-3k}{k}$, từ đó ta có :

$k\dfrac{1-3k}{k}+4k+2=0 \Leftrightarrow k+3=0 \Leftrightarrow k=-3.$

Rõ ràng k = –3 thỏa mãn (2), nên là giá trị duy nhất cần tìm của tham số k.

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;

b. Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng y = x + m luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

a. Xét hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$

+ Tập xác định: $D = R\backslash\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

+ Sự biến thiên:

o Chiều biến thiên: $y'=\dfrac{-1}{(2x-1)^2}<0,\ \forall x\in D$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$ va $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

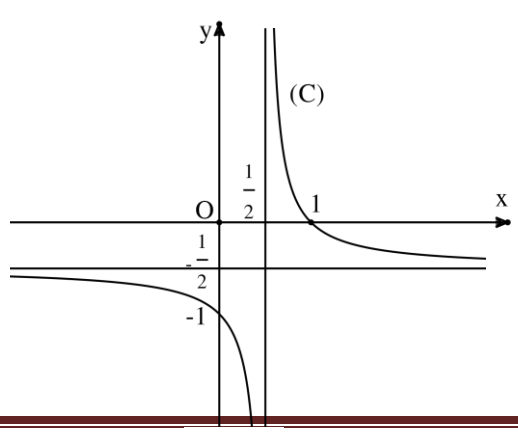
o Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\dfrac{1}{2}$; tiệm cận ngang: $y=-\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} y=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} y=+\infty$, tiệm cận đứng: $x=\dfrac{1}{2}$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		–	‖	–	
y	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$

• Đồ thị:



b. Gọi d là đường thẳng y = x + m

Hoành độ giao điểm của d với (C) là nghiệm của phương trình

$$x+m=\frac{-x+1}{2x-1} \qquad (1)$$

Vì x = $\frac{1}{2}$ không phải là nghiệm của (1), nên

(1) $\Leftrightarrow$ (x + m)(2x – 1) = –x + 1 $\Leftrightarrow$ $2x^2 + 2mx – m – 1 = 0$ (2)

Vì Δ' = $m^2 + 2m + 2 = (m + 1)^2 + 1 > 0$ ∀m, nên (d) và (C) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m.

Gọi x_1; x_2 là hai nghiệm phân biệt của (2). Khi đó theo ý nghĩa hình học của đạo hàm, ta có: $k_1+k_2=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}-\frac{1}{(2x_2-1)^2}$

$$=-\frac{4(x_1^2+x_2^2)-8x_1x_2-4(x_1+x_2)+2}{[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1]^2} \qquad (3)$$

Theo định lí Viet, thì $x_1+x_2=\frac{-2m}{2}=-m$; $x_1x_2=-\frac{m+1}{2}$ (4)

Thay (4) vào (3) và có:

$$k_1+k_2=-\frac{4m^2+4(m+1)+4m+2}{[-2(m+1)+2m+1]^2}=-4m^2-8m-6=-4(m+1)^2-2 \quad (5)$$

Từ (5) suy ra: k_1+k_2 lớn nhất $\Leftrightarrow$ m = –1.

Câu 30. Cho hàm số $y=\frac{2x}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số:

$y=\frac{2|x|}{|x|-1}$ (C_1)

b. Biện luận theo m số nghiệm $x\in[-1\,;\,2]$ của phương trình: $(m-2)|x|-m=0$

Lời giải.

a. + Tập xác định:D= R\{ 1}

+ Đạo hàm $y'=\frac{-2}{(x-1)^2}<0;\forall x\in D$

Do đó; hàm số nghịch biến trên tập xác định.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x-1}=2;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x-1}=2;$

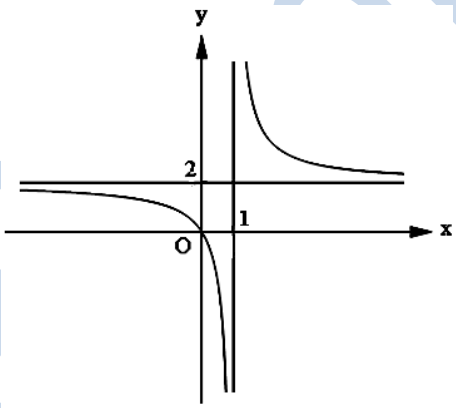
$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x}{x-1}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x}{x-1}=-\infty$

Do đó hàm số có tiệm cận đứng là x =1 và tiệm cận ngang là y= 2.

+ Bảng biến thiên :

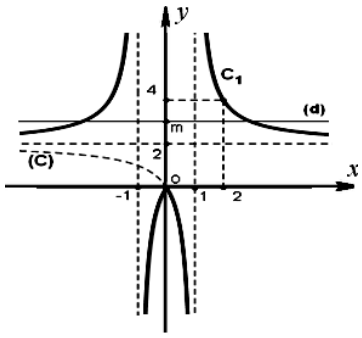
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	2 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

+ Đồ thị (C)



* Ta có : $(C_1): y=\dfrac{2|x|}{|x|-1}=\dfrac{2x}{x-1}$ khi $x\ge0$.

Mặt khác $y=\dfrac{2|x|}{|x|-1}$ là hàm số chẵn nên (C_1) nhận Oy làm trục đối xứng. Vậy đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2|x|}{|x|-1}$ (C_1) gồm hai phần:



+ Phần 1: Phần của (C) khi $x\ge0$.
+ Phần 2: Đối xứng của phần 1 qua Oy .

b. Ta có : $(m-2)|x|-m=0\Leftrightarrow\dfrac{2|x|}{|x|-1}=m\quad(1)$.

Số nghiệm $x\in[-1\,;2]$ của (1) là số giao điểm của (C_1) và (d): y= m trên đoạn [-1;2]. Nhìn vào đồ thị ta thấy:

- Khi $\left[\begin{array}{l} m \ge 4 \\ m = 0 \end{array}\right.$ thì phương trình (1) có một nghiệm $x \in [-1\,;\,2]$.

- Khi m<0 thì phương trình (1) có hai nghiệm $x \in [-1\,;\,2]$.

+ Khi 0< m< 4 thì phương trình (1) không có nghiệm

Câu 31. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ;

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M\left(0; \dfrac{5}{4}\right)$ và tiếp xúc với đồ thị.

Lời giải.

a +Tập xác định D = R\ {-1}

+ Sự biến thiên: $y' = \dfrac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

o Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x \to -1^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} y = -\infty$

$\Rightarrow$ x = –1 là tiệm cận đứng.

$y = \dfrac{-x^2 + x + 1}{x + 1} = -x + 2 - \dfrac{1}{x + 1}$

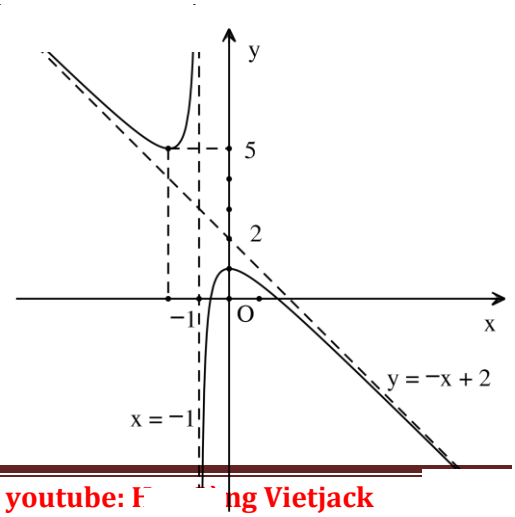
$\lim\limits_{x \to -\infty} y - (-x + 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} y - (-x + 2) = 0$

$\Rightarrow$ y = –x + 2 là tiệm cận xiên.

o Bảng biến thiên:

X	-∞		–2		–1		0		
y’		–	0	+	‖	+	0	–	+∞
Y	+∞	↘	5	↗	+∞ ‖ –∞	↗	1 Cực đại	↘	–∞
			Cực tiểu						

Đồ thị nhận điểm I(–1; 3) làm tâm đối xứng; cắt trục Oy tại (0;1), cắt trục Ox tại $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right), \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$.



b. Gọi (d) là đường thẳng y = $kx+\frac{5}{4}$.

Để (d) tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{-x_0^2+x_0+1}{x_0+1}=kx_0+\dfrac{5}{4} & (1) \\ \dfrac{-x_0^2-2x_0}{(x_0+1)^2}=k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm } x_0$$

Thế k từ (2) vào (1): $\frac{-x_0^2+x_0+1}{x_0+1}=\frac{-x_0^2-2x_0}{(x_0+1)^2}.x_0+\frac{5}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq -1 \\ (-x_0^2+x_0+1)(x_0+1)=-x_0^2-2x_0^2+\frac{5}{4}(x_0+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq -1 \\ 3x_0^2-2x_0-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

- Tại x_0= 1 $\Rightarrow$ k = $-\frac{3}{4}$, có tiếp tuyến (T_1): y = $-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.
- Tại $x_0=-\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ k = $\frac{5}{4}$, có tiếp tuyến (T_2): y = $\frac{5}{4}x+\frac{5}{4}$

Câu 32. Cho hàm số $y=\frac{x^2+2x-1}{x+1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ;

b. Dựa vào đồ thị của hàm số ở câu 1, vẽ đồ thị của hàm số y = $\frac{x^2+2|x|-1}{|x|+1}$ và từ đồ thị của hàm số này, biện luận về số nghiệm của phương trình $\frac{x^2+2|x|-1}{|x|+1}=a$ theo các giá trị của tham số a.

Lời giải.

a. y = $\frac{x^2+2x-1}{x+1}=x+1-\frac{2}{x+1}$.

- Tập xác định D = R\ {-1}

- Sự biến thiên: $y' = \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} > 0$ với mọi x thuộc D nên hàm số luôn luôn đồng biến trên D, không có cực đại và cực tiểu.

o Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to 11^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 11^+} y = -\infty$

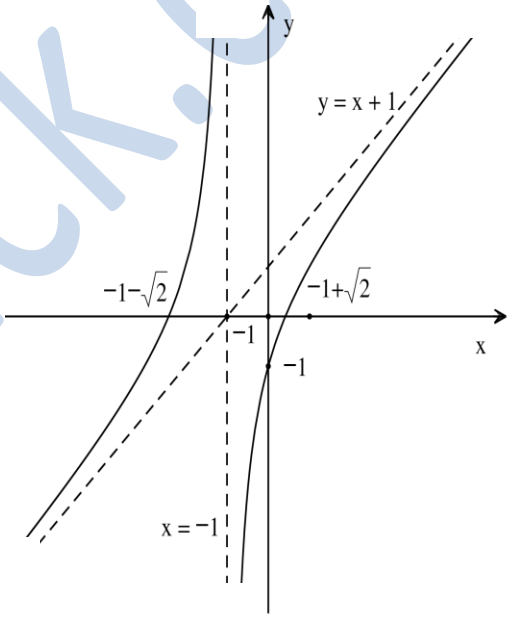
$\Rightarrow$ x = –1 là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y-(x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} y-(x+1) = 0 \Rightarrow$ y = x + 1 là tiệm cận xiên.

o Bảng biến thiên:

x	-∞		–1		+∞
y'		+	‖	+	
y	–∞ ↗	+∞	‖	–∞ ↗	+∞

Đồ thị nhận điểm I(–1; 0) làm tâm đối xứng; cắt trục Oy tại (0, –1), cắt trục Ox tại $\left(-1-\sqrt{2};0\right)$, $\left(-1+\sqrt{2};0\right)$.

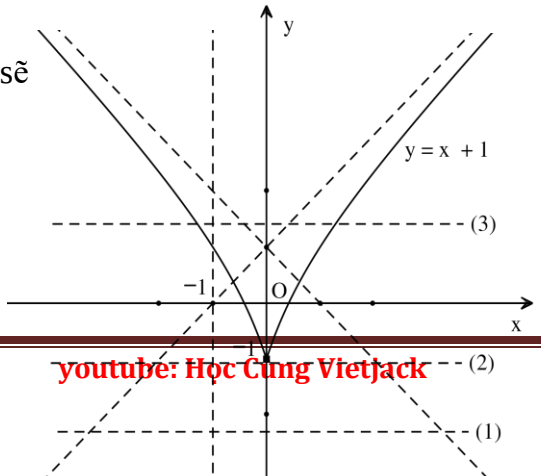


b. $y = \dfrac{x^2+2|x|-1}{|x|+1}$ là một hàm số chẵn (do f(–x)= f(x)) nên đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.

+ Vẽ phần đồ thị của (1) ứng với x ≥ 0.

+ Lấy đối xứng của phần đồ thị trên qua trục Oy sẽ được đồ thị của hàm số

$y = \dfrac{x^2+2|x|-1}{|x|+1}$ (hình bên).



Số giao điểm của đường thẳng y = a và đồ thị này là số nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2+2|x|-1}{|x|+1}=a.$$

Xét qua 3 vị trí của đường thẳng y = a:

(1): a < –1: vô nghiệm;

(2): a = –1: một nghiệm x = 0;

(3): a > –1: có 2 nghiệm.

Câu 32. Cho hàm số y = $\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b. Tìm các điểm trên (C) có các tọa độ x, y đều là số nguyên.

c. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của (C) là một số không đổi.

d. Tìm các điểm trên (C) sao cho tổng các khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

Lời giải

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

*Tập xác định : D= R\ {1}

*Sự biến thiên

- Giới hạn , tiệm cận .

  $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1, \lim\limits_{x\to-\infty} y=1$, suy ra đường thẳng y = 1 là đường tiệm cận ngang của đồ thị (C).

  $\lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty, \lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty$, suy ra đường thẳng x = 1 là đường tiệm cận đứng của đồ thị (C).

- Đạo hàm : $y'=\frac{-2}{(x-1)^2}<0$ với mọi x $\in$D ,suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định .

  Hàm số không có điểm cực trị .

- Bảng biến thiên

x	-∞		1		+∞
y'		-	‖	-	
y	1 ↘		-∞ ‖ +∞	↘	1

*Đồ thị .

- Giao điểm của đồ thị với trục toạ độ .

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm (0;-1)
Giao điểm của đồ thị với trục hoành là (-1;0).
Nhận xét đồ thị hàm số nhận giao điểm I(1;1) của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng .
b. Tìm các điểm trên (C) có tọa độ nguyên.

$y=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$.

Với $x\in\mathbb{Z}$ thì: $y\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{2}{x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2\vdots(x-1)\Leftrightarrow x-1\in\{-1;1;-2;2\}$.

+ x- 1= 1 => x= 2 ; y= 3.
+ x- 1= -1 => x= 0 ; y= -1
+ x – 1 = -2 =>x= -1; y= 0
+ x - 1 = 2 => x= 3; y= 2
Vậy các điểm trên có tọa độ nguyên là (2;3) , (0;-1); (-1;0) ; (3;2).
c. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của (C) là một số không đổi.

$M\in(C)\Rightarrow M(x_0;1+\frac{2}{x_0-1})$.

Tiệm cận đứng của (C): d_1 : x – 1 = 0
Tiệm cận ngang của (C) : d_2 : y – 1 = 0.

$d(M,\ d_1)\ =|x_0-1|,\ d(M,d_2)=\left|1+\frac{2}{x_0-1}-1\right|=\left|\frac{2}{x_0-1}\right|$.

$d(M,d_1).d(M,d_2)=|x_0-1|.\left|\frac{2}{x_0-1}\right|=2$ (đpcm).

d. Tìm các điểm trên (C) sao cho tổng các khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

$M(x_0;1+\frac{2}{x_0-1})\in(C)$,suy ra

$T=d(M,d_1)+d(M,d_2)=|x_0-1|+\left|\frac{2}{x_0-1}\right|\overset{\text{Côsi}}{\geq}2\sqrt{|x_0-1|.\left|\frac{2}{x_0-1}\right|}=4$

$T=4\Leftrightarrow|x_0-1|=\left|\frac{2}{x_0-1}\right|\Leftrightarrow(x_0-1)^2=2\Leftrightarrow x_0-1=\pm\sqrt{2}\Leftrightarrow x_0=1\pm\sqrt{2}$

Suy ra $\min T\ =4\Leftrightarrow x_0=1\pm\sqrt{2}$.

Vậy hai điểm cần tìm là $M_1\left(1+\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right),M_2\left(1-\sqrt{2},1-\sqrt{2}\right)$.

Câu 33: Cho hàm số $y=\frac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}$ (1), với m là số thực.
a. Khảo sát sự biến thiên đồ thị hàm số khi m= 1.

b. Tìm m để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0

Lời giải

a. Với m = 1, ta có: $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+3}=x-2+\dfrac{4}{x+3}$.

+ Hàm số đã cho có tập xác định là : D= R\ {-3}.

+ Xét sự biến thiên của hàm số

Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực và tiệm cận

Ta có: $\lim\limits_{x\to -3^-} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to -3^+} y=+\infty \Rightarrow x=-3$ là đường tiệm cận đứng .

$\lim\limits_{x\to -\infty} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to +\infty} y=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left[y-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[y-(x-2)\right]=0\Rightarrow y=x-2$ là đường tiệm cận xiên.

+ Bảng biến thiên

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-5\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		- 5		-3		- 1		$+\infty$
y'		+	0	–	‖	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	- 9	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng (-5; -3) và (-3; -1).

Hàm số có điểm cực đại tại x=- 5; $y_{CĐ}$ = - 9 và có điểm cực tiểu tại x=- 1; y_{CT} = - 1.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $\left(0;-\dfrac{2}{3}\right)$.

Nhận xét: Đồ thị nhận giao điểm I(-3; -5) của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.

b. Ta có: $y=\dfrac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}=mx-2+\dfrac{6m-2}{x+3m}$

* Nếu $m=\dfrac{1}{3}$ đồ thị hàm số không tồn tại hai tiệm cận

* Nếu $m\neq\dfrac{1}{3}$, đồ thị hàm số có hai tiệm cận d_1: x= - 3m hay x+ 3m = 0 và d_2: y= mx- 2

Hay mx- y – 2 = 0.

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1}(1;0),\ \overrightarrow{n_2}(m;-1)$ lần lượt là véc tơ pháp của d_1 và d_2.

Góc giữa d_1 và d_2 bằng $45^0\Leftrightarrow \cos 45^0=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\Leftrightarrow \dfrac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Vậy $m=\pm 1$ là những giá trị cần tìm.

Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$ có đồ thị là (C) ; m là tham số .

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi m= 2.

b. Xác định tham số m để tiệm cận đứng của đồ thị đi qua điểm $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$.

c. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó .

Lời giải

a. Với $m=2\Rightarrow(C_2):y=\dfrac{2x-1}{2x+2}$

+ Hàm số có tập xác định là D= R\ { -1}.

+ Xét sự biến thiên của hàm số

* Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực và các đường tiệm cận

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=+\infty$ nên đường thẳng x=-1 là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số .

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=1\Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

* Bảng biến thiên

Ta có: $y'=\dfrac{6}{(2x+2)^2}>0;\ \forall x\neq-1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	1 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

+ Đồ thị cắt Ox tại điểm $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ và cắt Oy tại điểm $\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Nhận xét: Đồ thị nhận giao điểm I(-1; 1) của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng

b. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow m\left(-\dfrac{m}{2}\right)-1\neq0\Leftrightarrow m^2+2\neq0$ đúng mọi m.

Khi đó đường thẳng $x=-\dfrac{m}{2}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow-\dfrac{m}{2}=-1\Leftrightarrow m=2$ là giá trị cần tìm.

c. Hàm số xác định trên $D=R\setminus\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$

Ta có: $y'=\dfrac{m^2+2}{(2x+m)^2}>0;\ \forall x\neq-\dfrac{m}{2}$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$, có đồ thị (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)

b. Cho M là một điểm bất kì nằm trên (C), tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B . Chứng minh diện tích tam giác IAB (I là giao của hai tiệm cận) không phụ thuộc vào M và M là trung điểm đoạn AB.

Lời giải

a. Khảo sát và vẽ (C).

+ Hàm số đã cho có tập xác định là : D = R\{1}

+ Xét sự biến thiên của hàm số

Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực và tiệm cận

Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là đường TCĐ .

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[y - (x - 2) \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[y - (x - 2) \right] = 0 \Rightarrow y = x - 2$ là đường tiệm cận xiên.

Bảng biến thiên

Ta có: $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array} \right.$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng (-1; 1) và (1;3).

Hàm số có điểm cực đại tại x= -1; $y_{CĐ}$ = -5 và có điểm cực tiểu tại x= 3; y_{CT} = 3.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm (0; -6).

Nhận xét: Đồ thị nhận giao điểm I(1; -1) của hai tiệm cận làm tâm đối xứng

b. $M \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; x_0 - 1 + \dfrac{4}{x_0 - 1} \right)$.

Tiếp tuyến Δ của (C) tại M có phương trình :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 = \left(1 - \frac{4}{(x_0 - 1)^2} \right)(x - x_0) + x_0 - 1 + \frac{4}{x_0 - 1}$$

$\Delta \cap TCD \equiv A\left(1;\dfrac{8}{x_0-1}\right)$; $\Delta \cap TCX \equiv B\left(2x_0-1;2x_0-2\right)$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{x_A+x_B}{2}=x_0=x_M \\ \dfrac{y_A+y_B}{2}=x_0-1+\dfrac{4}{x_0-1}=y_M \end{cases}$ => M là trung điểm đoạn AB.

Gọi H là hình chiếu của B lên đường thẳng IA $\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}$.

Câu 36. Cho hàm số $y=x+2+\dfrac{1}{x-1}$ có đồ thị là (C)

a. Tìm trên (C) những điểm có tọa độ đều là các số nguyên.

b. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Chứng minh rằng không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua I.

c. Chứng minh rằng tích khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc (C) đến hai tiệm cận không đổi.

Lời giải

a. Xét điểm $M(x_0;y_0)\in(C);\ x_0,y_0\in\mathbb{Z}$

Do $y_0=x_0+2+\dfrac{1}{x_0-1}\Rightarrow y_0\in(C)\Leftrightarrow \dfrac{1}{x_0-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x_0-1=\pm1\Leftrightarrow x_0=0;x_0=2$.

Vậy trên (C) có hai điểm nguyên M_1 (0 ;1) ; M_2 (2 ;5).

b. Giao điểm hai đường tiệm cận là I (1; 3)

Xét tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tọa độ (x_o ; y_o)

$$\Delta: y=\left(1-\frac{1}{(x_0-1)^2}\right)(x-x_0)+x_0+2+\frac{1}{x_0-1}$$

$$I\in\Delta\Leftrightarrow 3=\left(1-\frac{1}{(x_0-1)^2}\right)(1-x_0)+x_0+2+\frac{1}{x_0-1}$$

$$\Leftrightarrow 3=1-x_0+\frac{1}{x_0-1}+x_0+2+\frac{1}{x_0-1}\Leftrightarrow \frac{1}{x_0-1}=0 \text{ vô nghiệm}$$

Vậy không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua I.

c. Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $\Delta_1: x-1=0$, tiệm cận xiên $\Delta_2: x-y+2=0$

Xét $M\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;x_0+2+\dfrac{1}{x_0-1}\right)$

$$d_1=d(M,\Delta_1)=|x_0-1|;\ d_2=d(M,\Delta_2)=\frac{1}{\sqrt{2}|x_0-1|}$$

$\Rightarrow d_1.d_2 = |x_0 - 1|.\dfrac{1}{\sqrt{2}|x_0 - 1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ không đổi $\Rightarrow$ đpcm.

Câu 37. Cho hàm số $y = 2x - 1 + \dfrac{2}{x-1}$ có đồ thị là(C)

a. Chứng minh rằng đồ thị (C) nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

b. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm bất kỳ thuộc (C) đến hai tiệm cận của (C) là một số không đổi.

Lời giải

a. * Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là x= 1 và tiệm cận xiên là y= 2x- 1.

Do đó, giao điểm hai đường tiệm cận là I(1 ; 1) .

* Thực hiện phép dời hệ trục Oxy về hệ trục IXY theo véc tơ $\overrightarrow{OI}$

Công thức dời trục : $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 1 \end{cases}$

Từ $y = 2x - 1 + \dfrac{2}{x-1}$ nên $Y + 1 = 2(X+1) - 1 + \dfrac{2}{X} \Rightarrow Y = 2X + \dfrac{2}{X}$

Vì Y(- X)= - Y(X) nên trong hệ tọa độ IXY hàm số đã cho là hàm số lẻ nên (C) nhận I làm tâm đối xứng.

b. Lấy $M\left(x_0; 2x_0 - 1 + \dfrac{2}{x_0 - 1}\right)$

$$d_1 = d(M, TCN) = \frac{\left|2x_0 - \left(2x_0 - 1 + \dfrac{2}{x_0 - 1}\right) - 1\right|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}|x_0 - 1|}$$

$d_2 = d(M, TCD) = |x_0 - 1|$,suy ra $d_1.d_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ không phụ thuộc vào M.

Câu 38. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C).

a. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

b. Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của (C) đều tạo với hai tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

Lời giải

a.Tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên ta có $y'(x_0) = \pm 1$.

Mà $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = 2$.

* Với $x_0 = 0$ => y_0= 1 nên phương trình tiếp tuyến là:

y = - 1(x- 0) +1 hay y = - x +1

+ Với x_0= 2 thì y_0 = 3 nên phương trình tiếp tuyến là:
y= - 1(x- 2) + 3 hay y = - x+ 5

b.Gọi M(x_0; y_0) là tiếp điểm. Ta có phương trình tiếp tuyến Δ:

$$y=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-1}.$$

Đường thẳng Δ cắt TCĐ: x= 1 tại $A(1;\frac{2x_0}{x_0-1})$ và cắt TCN tại B($2x_0$ - 1; 2).

Gọi I(1;2), suy ra tam giác ABI có diện tích

$S=\frac{1}{2}IA.IB=\frac{1}{2}.\frac{2}{|x_0-1|}.2|x_0-1|=2$ không đổi.

Câu 39. Cho hàm số $y=\frac{x^2+mx+m^2-2m-4}{x-2}$ (1).

a. Khảo sát sự biến thiên đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.

b. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị cách đều đường thẳng Δ: 2x+ y+ 1 = 0

Lời giải

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C): $y=\frac{x^2+x-5}{x-2}=x+3+\frac{1}{x-2}$

*****Tập xác định: D= R\ {2}.

* Sự biến thiên

- Giới hạn , tiệm cận .

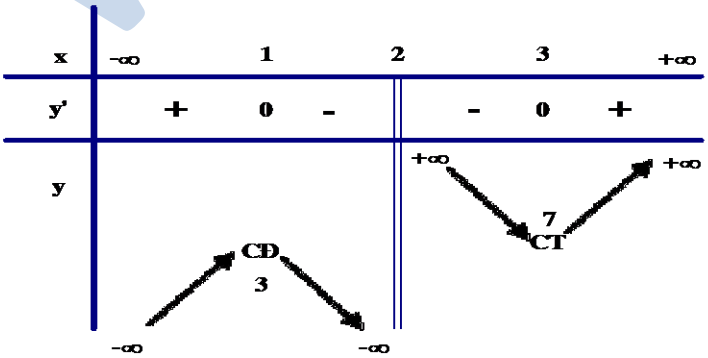
  $\lim\limits_{x\to 2^-} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} y=+\infty$ nên đường thẳng x = 2 là tiệm cận đứng của (C).

  $\lim\limits_{x\to -\infty} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} y=+\infty$.

  $\lim\limits_{x\to -\infty}[y-(x+3)]=0$, $\lim\limits_{x\to +\infty}[y-(x+3)]=0$ nên đường thẳng y = x+3 là tiệm cận xiên của (C).

- Đạo hàm : $y'=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\,,\,y=3\\x=3\,,\,y=7\end{array}\right.$.

- Bảng biến thiên



Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$.
Hàm số nghịch biến trên các khoảng (1;2) và (2;3).
Hàm số đạt cực đại tại x = 1; $y_{CĐ} = 3$ và đạt cực tiểu tại x = 3, $y_{CT} = 7$.

*Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị với trục toạ độ .

Giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $\left(0;\frac{5}{2}\right)$

- Một số điểm khác của đồ thị : $x=-1$, $y=\frac{5}{3}$; $x=4$, $y=\frac{15}{2}$.

Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận giao điểm I(2;5) của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng .

b. Đạo hàm : $y'=\frac{x^2-4x+4-m^2}{(x-2)^2}$.

Dấu của y' là dấu của $g(x) = x^2 - 4x + 4 - m^2$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình g(x) = 0 có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=4-4+m^2=m^2>0\\ 4-8+4-m^2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m\neq 0.$$

Nghiệm của g(x) = 0 là $x_1 = 2 - m$, $x_2 = 2 + m$ suy ra hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là A(2- m; 4- m); B(2+ m, 4 + 3m)

$$d(A,\Delta)=\frac{|9-3m|}{\sqrt{5}},\ d(B,\Delta)=\frac{|9+5m|}{\sqrt{5}}.$$

$$d(A,\Delta)=d(B,\Delta)\Leftrightarrow |9-3m|=|9+5m|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}9-3m=9+5m\\ 9-3m=-9-5m\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=-9\end{array}\right.$$

So với điều kiện $m\neq 0$ nhận m = - 9.

Câu 40. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C).

a. Khảo sát sự biến thiên của đồ thị (C).

b. Chứng minh rằng đồ thị (C) có ít nhất hai trục đối xứng

c. Tìm tất cả những cặp điểm M ; N nằm về hai nhánh của (C) sao cho MN có độ dài nhỏ nhất.

d. Tìm tất cả những điểm K thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại K tạo với hai trục tọa độ một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải

a. Khảo sát

+ Hàm số đã cho xác định : D = R\ {1}.

+ Sự biến thiên

- Giới hạn :

$\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.

- Đạo hàm : $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0, x \neq 1$.

Đồ thị của hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		–	||	–	
y	2 ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	2

+ Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục Oy tại A(0 ;1), với Ox tại $B\left(\frac{1}{2};0\right)$

Nhận xét : Đồ thị của hàm số nhận I(1 ;2) giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

b. Thực hiện phép dời trục Oxy về hệ trục mới IXY qua công thức dời trục : $\begin{cases} x = X+1 \\ y = Y+2 \end{cases}$

Trong hệ trục mới (C) có phương trình là : $Y+2 = \dfrac{2(X+1)-1}{X+1-1} \Leftrightarrow Y = \dfrac{1}{X}$.

+mXét đường thẳng $\Delta_1 : Y = X$ và điểm $T(a;b) \in (C) \Rightarrow b = \dfrac{1}{a}$

Đường thẳng d đi qua T, vuông góc với Δ_1 có phương trình Y= - X+ b+ a

$\Delta_1 \cap d = H : \begin{cases} Y = X \\ Y = -X+b+a \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{a+b}{2};\dfrac{a+b}{2}\right)$

Gọi T' là điểm đối xứng với T qua Δ_1 suy ra T'(b ;a).

Vì $b = \dfrac{1}{a} \Rightarrow a = \dfrac{1}{b} \Rightarrow T' \in (C) \Rightarrow (C)$ có Δ_1 là trục đối xứng

Tương tự ta cũng chứng minh được $\Delta_2 : Y = -X$ cũng là trục đối xứng của (C).

Vậy (C) có ít nhất hai trục đối xứng lần lượt có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là : y= x+ 1 và y= - x+ 3.

c. Xét đồ thị (C) trong hệ tọa độ IXY

Gọi $M\left(m;\dfrac{1}{m}\right)$, $N\left(-n;-\dfrac{1}{n}\right)$ với m ; n>0

Ta có M ; N nằm về hai nhánh của đồ thị (C)

$$MN^2 = (m+n)^2 + \left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^2 = (m+n)^2\left(1+\frac{1}{m^2n^2}\right) \geq 4mn\frac{2}{mn} = 8 \Rightarrow MN \geq 2\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} m = n \\ mn = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = n = 1$ (do m, n>0).

Vậy hai điểm cần tìm trong hệ tọa độ Oxy lần lượt có tọa độ là : M(2;3) ; N(0; 1) .

d. Xét (C) trong hệ tọa độ IXY. Ta có $Y' = -\frac{1}{X^2}$

Gọi $K\left(a;\frac{1}{a}\right)$ phương trình tiếp tuyến của (C) tại K

$\Delta : Y = -\frac{1}{a^2}(X - a) + \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}X + \frac{2}{a}$.

Hai tiệm cận của (C) chính là hai trục tọa độ IX, IY

Δ cắt hai trục này lần lượt tại $A\left(0;\frac{2}{a}\right)$, $B(2a;0)$

Chu vi tam giác IAB : $P = AB + IA + IB = \sqrt{IA^2 + IB^2} + IA + IB \geq \left(2\sqrt{2} + 2\right)\sqrt{IA.IB}$

Mà $IA.IB = \left|\frac{2}{a}\right|.|2a| = 4 \Rightarrow P \geq 2\left(2\sqrt{2} + 2\right)$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow \left|\frac{2}{a}\right| = |2a| \Leftrightarrow a = \pm 1$

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán và tạo độ của hai điểm đó trong hệ tọa độ Oxy là : $K_1(2;3)$; $K_2(0;1)$.