

Chủ đề góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

Dạng 1: Góc nội tiếp đường tròn. Chứng minh hai góc bằng nhau

A. Phương pháp giải

Ta áp dụng các kiến thức sau:

1. Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

Cung nằm bên trong góc gọi là cung bị chắn.

2. Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng một nửa số đo của cung bị chắn.

3. Trong một đường tròn:

a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

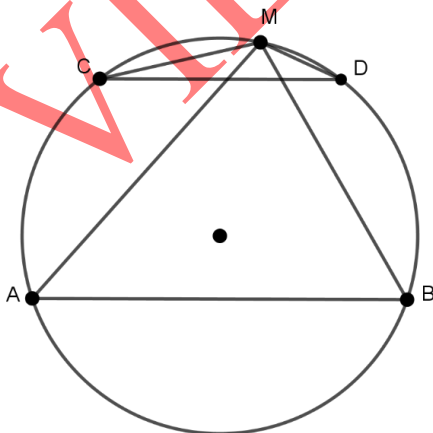
c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

B. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho đường tròn tâm O và hai dây cung song song AB, CD. Trên cung AB lấy điểm M. Chứng minh rằng $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$.

Hướng dẫn giải



Ta có: \widehat{AMC} là góc nội tiếp chắn AC

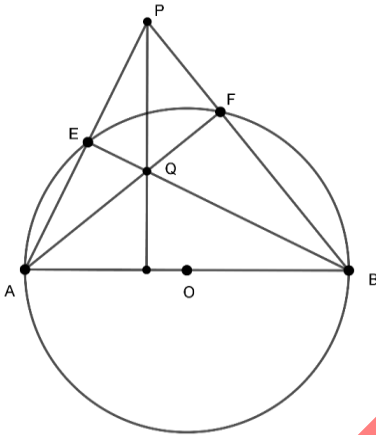
\widehat{BMD} là góc nội tiếp chắn DB

Ta lại có $AB \parallel CD$ nên $AC = BD$.

Do đó: $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O) đường kính AB và hai điểm E, F nằm trên một đường tròn. Các đường thẳng AE, BF cắt nhau tại P nằm ngoài đường tròn (O) . AF và BE cắt nhau tại Q . Chứng minh PQ vuông góc với AB .

Hướng dẫn giải



Ta có \widehat{AEB} và \widehat{AFB} là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{AEB} = \widehat{AFB} = 90^\circ$.

$\Rightarrow AF \perp PB; BE \perp PA$

Xét $\triangle PAB$, ta có: $AF \perp PB; BE \perp PA$

Mà $AF \cap BE = \{Q\}$

Suy ra Q là trực tâm $\triangle PAB$.

Từ đó suy ra $PQ \perp AB$.

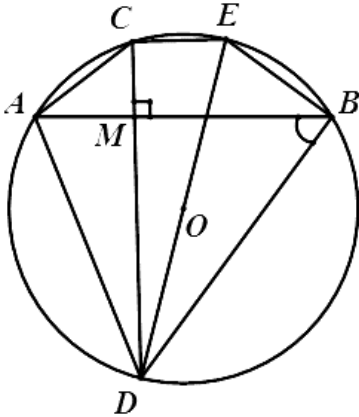
Ví dụ 3: Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm M bên trong đường tròn đó. Qua M kẻ hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau (C thuộc cung nhỏ AB). Vẽ đường kính DE . Chứng minh rằng:

a) $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

b) Tứ giác ABEC là hình thang cân.

c) Tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong đường tròn (O).

Hướng dẫn giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle DMB$ có:

$\angle ACD = \angle ABD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

$\angle AMC = \angle BMD = 90^\circ$ (GT)

$\Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle DMB$ (g.g)

$\Rightarrow MA/MD = MC/MB \Leftrightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

b) Ta có: $\angle DCE = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow CD \perp CE$

Mà $CD \perp AB$ (gt)

$\Rightarrow AB \parallel CE$.

\Rightarrow Tứ giác ABEC là hình thang (1).

Mặt khác: CE và AB là hai dây song song của đường tròn (O) chắn hai cung AC và BE nên

$$AC = BE$$

Ta lại có: $AE = AC + CE$; $BC = BE + CE$

$\Rightarrow AE = BC \Rightarrow \angle ABE = \angle BAC$.(hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABEC là hình thang cân.

c) Vì $AE = BC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow AE = BC$.

Mặt khác: $\angle DAE = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét $\triangle DAE$ vuông tại A có: $AD^2 + AE^2 = DE^2$ (định lý Py – ta – go)

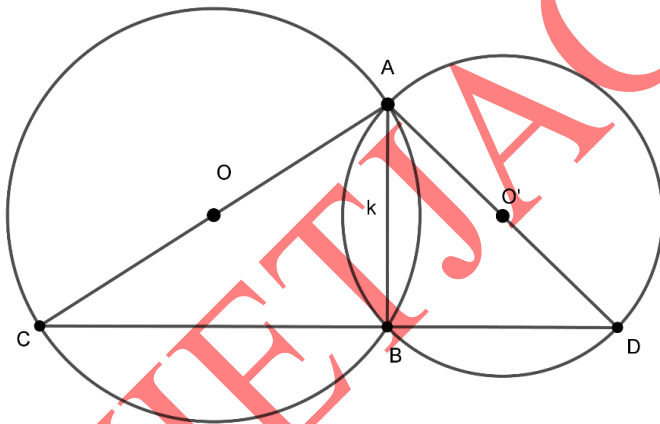
Xét tổng: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$

$= (MA^2 + MD^2) + (MB^2 + MC^2)$

$= AD^2 + BC^2 = AD^2 + AE^2 = DE^2 = 4R^2$ không đổi.

Ví dụ 4: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ các đường kính AC, AD của hai đường tròn. Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



Ta có: Trong đường tròn tâm O, $\angle ABC$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$

Trong đường tròn tâm O', $\angle ABD$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow \angle ABD = 90^\circ$

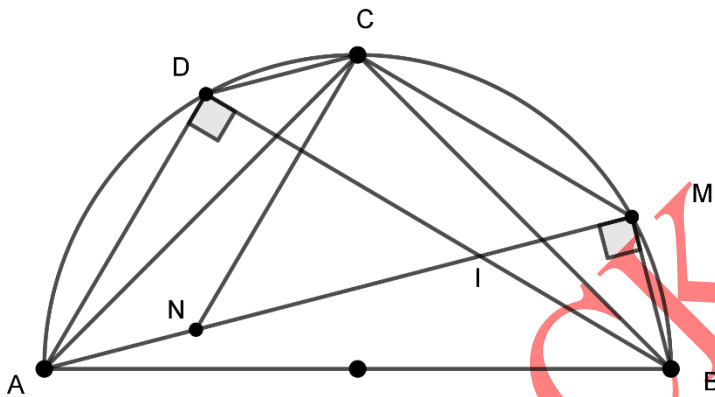
$\Rightarrow \angle CBD = \angle ABC + \angle ABD = 180^\circ$

Suy ra, ba điểm C, B và D thẳng hàng.

Ví dụ 5: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và C là điểm chính giữa của cung AB. Lấy điểm M thuộc cung BC và điểm N thuộc tia AM sao cho $AN = BM$. Kẻ dây CD song song với AM.

- Chứng minh $\triangle ACN = \triangle BCM$.
- Chứng minh $\triangle CMN$ vuông cân.
- Tứ giác ANCD là hình gì? Vì sao?

Hướng dẫn giải



- Xét $\triangle ACN$ và $\triangle BCM$ có:

$AC = BC$ (vì C là điểm chính giữa cung AB)

$\angle CAN = \angle CBN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CM)

$AN = BM$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ACN = \triangle BCM$ (c.g.c)

- Vì $\triangle ACN = \triangle BCM$ (chứng minh a)

$\Rightarrow CN = CM \Rightarrow \triangle CMN$ cân tại C (1)

$\Rightarrow \angle CMN = \angle CNM$ (hai góc ở đáy)

Lại có $\angle CMA = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AC} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle CMN = \angle CNM = 45^\circ$

$$\Rightarrow MCN = 180^\circ - (CMN + CNM) = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle CMN$ vuông cân tại C.

c) Vì $CD \parallel AM$ nên tứ giác ADCM là hình thang cân.

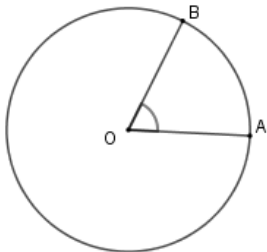
Ta có: $DAM = CMN = CNM = 45^\circ$

Suy ra: $AD \parallel CN$.

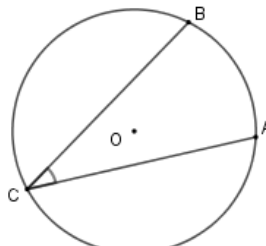
Vậy tứ giác ADCN là hình bình hành.

C. Bài tập trắc nghiệm

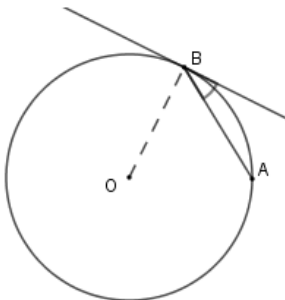
Câu 1: Hình nào dưới đây biểu diễn góc nội tiếp?



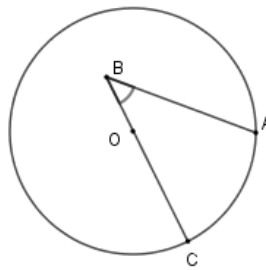
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 1

B. Hình 2

C. Hình 3

D. Hình 4

Hướng dẫn giải

Đáp án B

Hình 1: Góc BOA là góc ở tâm

Hình 2: Góc BOA là góc nội tiếp

Hình 3: Có một cạnh không là dây của đường tròn

Hình 4 : Góc đã cho có đỉnh không nằm trên đường tròn

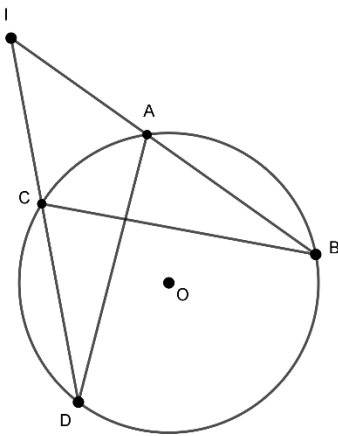
Câu 2: Cho đường tròn (O) và điểm I nằm ngoài (O). Từ điểm I kẻ hai dây cung AB và CD (A nằm giữa I và B, C nằm giữa I và D)

Tích IA.IB bằng

- A. ID.CD B. IC.CB C. IC.CD
D. ID.IC

Hướng dẫn giải

Đáp án D



Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AC)

Xét $\triangle IAD$ và $\triangle ICB$, ta có:

$\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (chứng minh trên)

\widehat{I} : góc chung

$\Rightarrow \triangle IAD \sim \triangle ICB$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{ID}{IB} \Leftrightarrow IA \cdot IB = ID \cdot IC.$$

Vậy $IA \cdot IB = ID \cdot IC$.

Câu 3: Cho đường tròn tâm O. Trên đường tròn lấy 4 điểm theo thứ tự A, B, C và D. Hỏi cặp góc nào sau đây bằng nhau

- A. $AOC; ABC$ B. $ACD; BOC$
 C. $BDC; BAC$ D. $ABC; ACD$

Hướng dẫn giải

Đáp án C

Ta có BDC là góc nội tiếp chắn BC

Và BAC là góc nội tiếp chắn BC

$\Rightarrow BDC = BAC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn BC).

Câu 4: Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Trong một đường tròn, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông
 B. Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau
 C. Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau
 D. Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau thì cùng chắn một cung

Hướng dẫn giải

Đáp án D

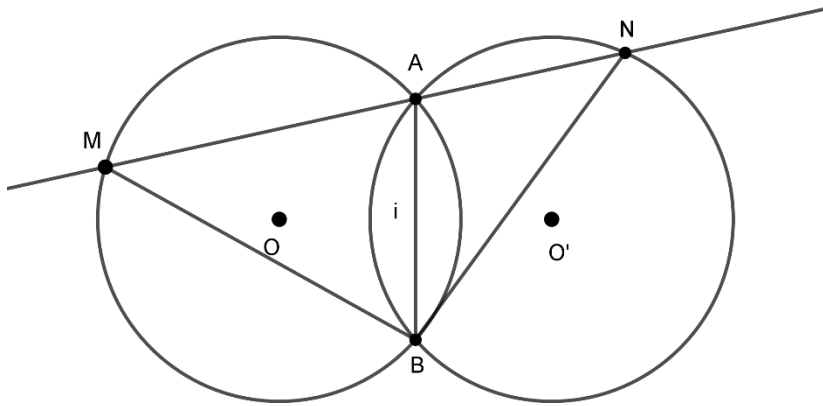
Vì trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau thì có thể chắn hai cung bằng nhau.

Câu 5: Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Vẽ đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại M và cắt đường tròn (O') tại N (A nằm giữa M và N). Hỏi tam giác MNB là tam giác gì?

- A. Tam giác cân B. Tam giác đều C. Tam giác vuông D. Tam giác vuông cân

Hướng dẫn giải

Đáp án A



+ (O) và (O') là hai đường tròn bằng nhau

AnB và $An'B$ cùng được căng bởi dây AB

$$\Rightarrow AnB = An'B \quad (1)$$

+ (O) có BMA là góc nội tiếp chắn cung AnB

$$\Rightarrow BMA = \frac{1}{2} sđAnB \quad (2)$$

+ (O') có BNA là góc nội tiếp chắn cung $An'B$

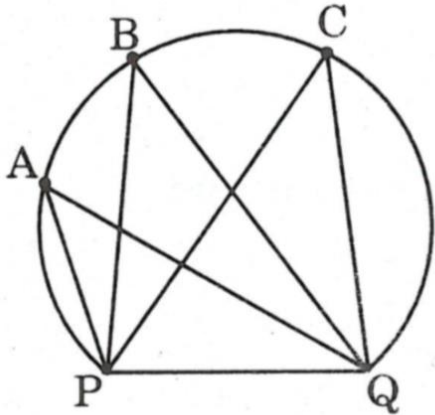
$$\Rightarrow BNA = \frac{1}{2} sđAn'B \quad (2)$$

Từ (1); (2); và (3) suy ra $BMA = BNA$

$$\Rightarrow \Delta BMN \text{ cân tại B.}$$

Câu 6: Một huấn luyện viên cho cầu thủ tập sút bóng vào cầu môn PQ. Bóng được đặt ở các

vị trí A, B, C trên một cung tròn như hình bên. Hãy so sánh các góc PAQ, PBQ, PCQ .



- A. $PAQ < PBQ < PCQ$. B. $PAQ < PBQ = PCQ$.
 C. $PAQ = PBQ < PCQ$. D. $PAQ = PBQ = PCQ$.

Hướng dẫn giải

Đáp án D

Ta có $PAQ = PBQ = PCQ$ vì chúng là các góc nội tiếp chắn cùng một cung PQ .

Câu 7: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc trong với nhau tại A , ($R > R'$). Qua điểm B bất kỳ trên (O') vẽ tiếp tuyến với (O') cắt (O) tại hai điểm M và N , AB cắt (O) tại C . Các phát biểu đúng là:

(I) $MN \perp OC$

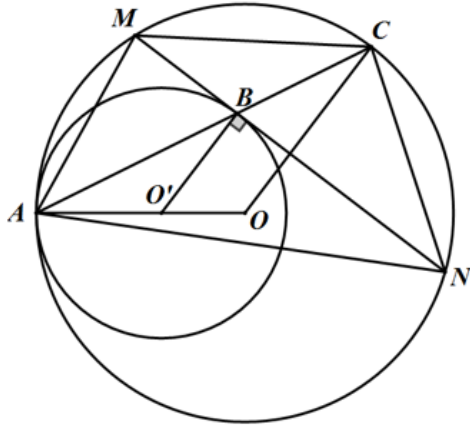
(II) AC là tia phân giác của MAN

(III) $MN \perp AB$

- A. (I) và (III) B. (II) và (III) C. (I) và (III) D. (I), (II) và (III)

Hướng dẫn giải

Đáp án C



+ Vì $\Delta O'AB$ cân tại O' nên $O'AB = O'BA$

ΔOAC cân tại O nên $OAC = OCA$

Suy ra $OCA = O'BA$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị, do đó $O'B \parallel OC$.

Mặt khác MN là tiếp tuyến của (O') tại B

$\Rightarrow O'B \perp MN$. Do đó $OC \perp MN$

+ Trong đường tròn (O) :

$\Rightarrow OC$ là đường trung trực của MN

$\Rightarrow CM = CN$

$\Rightarrow \widehat{CM} = \widehat{CN}$

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{NAC}$

Hay AC là tia phân giác của \widehat{MAN} .