Dạng 3: Chứng minh hệ thức hình học.

A. Phương pháp giải

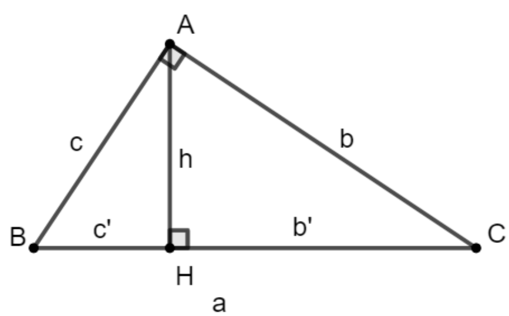
1. Chọn các tam giác vuông thích hợp chứa các đoạn thẳng có trong hệ thức. Tính các đoạn thẳng đó nhờ các hệ thức về cạnh và đường cao.

2. Liên kết các giá trị trên và rút ra hệ thức phải chứng minh.

Cho $\triangle ABC$, $\hat{A} = 90°$, $AH \perp BC$, BC = a, AB = c, AC = b, AH = h thì:

+) BH = c' được gọi là hình chiếu của AB trên cạnh huyền BC

+) CH = b' được gọi là hình chiếu của AC trên cạnh huyền BC



Khi đó ta có các hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông:

1) $b^2 = ab'$; $c^2 = ac'$

2) $h^2 = b'c'$

3) ha = bc

4) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

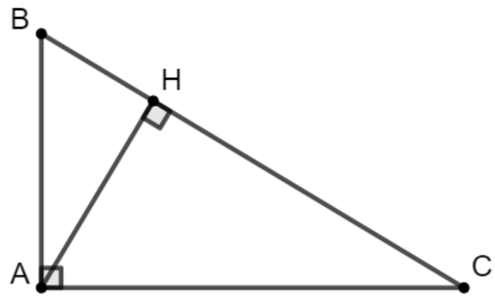
5) $a^2 = b^2 + c^2$ (Định lý Pytago)

B. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Chứng minh rằng:

$$BH^2 + CH^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH^2$$

Bài giải:



+) Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH ta có:

$AH^2 = BH.CH \quad (1)$

+) Áp dụng định lý Py – ta – go cho tam giác ABC có:

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = (BH + CH)^2$

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BH^2 + CH^2 + 2.BH.CH \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta được:

$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BH^2 + CH^2 + 2AH^2$

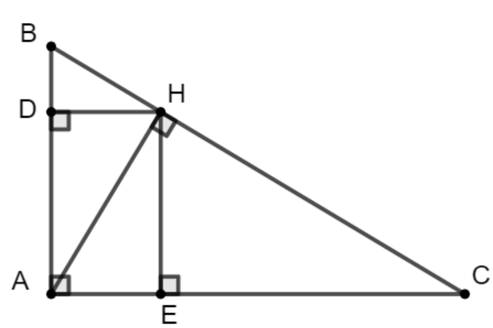
$\Leftrightarrow BH^2 + CH^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH^2$

Vậy $BH^2 + CH^2 = AB^2 + AC^2 - 2AH^2$.

Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Hãy chứng minh

$$3AH^2 + BD^2 + CE^2 = BC^2$$

Bài giải:



+) Xét $\triangle BHD$ vuông tại D, áp dụng định lý Py – ta – go ta có: $BD^2 = BH^2 - DH^2$

+) Xét $\triangle CHE$ vuông tại E, áp dụng định lý Py – ta – go ta có: $CE^2 = CH^2 - EH^2$

+) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, áp dụng định lý Py – ta – go ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

+) Xét $\triangle AHE$ vuông tại E, áp dụng định lý Py – ta – go ta có: $AH^2 = AE^2 + EH^2$

Ta có:

$3AH^2 + BD^2 + CE^2 = BC^2$

$\Leftrightarrow 3AH^2 + (BH^2 - DH^2) + (CH^2 - EH^2) = AB^2 + AC^2$(Định lý Py – ta – go cho ba tam giác vuông $\triangle BHD$, $\triangle CHE$ và $\triangle ABC$)

$\Leftrightarrow 3AH^2 + BH^2 + CH^2 - (EH^2 + DH^2) = AB^2 + AC^2$ (*)

+) Xét tứ giác ADHE có:

$DAE = ADH = AEH = 90°(gt)$

$\Rightarrow$ Tứ giác ADHE là hình chữ nhật $\Rightarrow DH = AE$

Thay DH = AE vào (*) ta có:

$(*) \Leftrightarrow 3AH^2 + BH^2 + CH^2 - (EH^2 + AE^2) = AB^2 + AC^2$

$\Leftrightarrow 3AH^2 + BH^2 + CH^2 - AH^2 = AB^2 + AC^2$ (do $AH^2 = AE^2 + EH^2$)

$\Leftrightarrow BH^2 + CH^2 + 2AH^2 = AB^2 + AC^2$ (luôn đúng theo ví dụ 1)

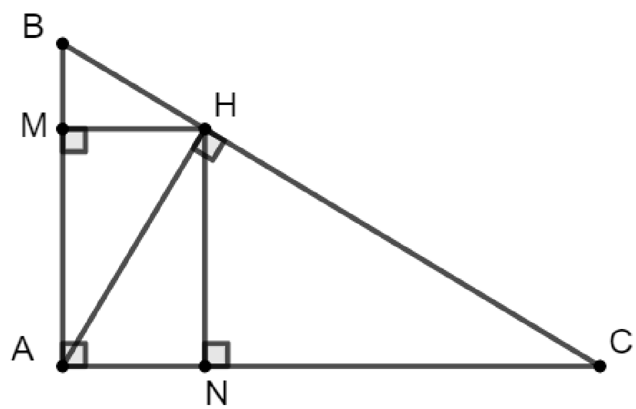
Vậy $3AH^2 + BD^2 + CE^2 = BC^2$.

Ví dụ 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Chứng minh rằng:

a) AM.AB = AN. AC

b) HB.HC = MA.MB + NA.NC

Bài giải:



a) Xét $\triangle ABH$ có: $AH \perp BC \Rightarrow AHB = AHC = 90^0$

$\Rightarrow \triangle ABH$ vuông tại H

Mà $HM \perp AB \Rightarrow AM.AB = AH^2$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Chứng minh tương tự: $AN.AC = AH^2$

Vậy suy ra $AH^2 = AM.AB = AN.AC$ (đpcm)

b)

+) Xét tam giác ABC vuông tại A có $AH \perp BC(gt) \Rightarrow AH^2 = BH.CH$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Chứng minh tương tự:

Xét tam giác vuông ABH ta có: $MH^2 = BM.AM$

Xét tam giác vuông ACH có: $NH^2 = AN.CN$

+) Xét tứ giác AMHN có:

$MAN = AMH = ANH = 90°(gt)$

$\Rightarrow$ Tứ giác AMHN là hình chữ nhật $\Rightarrow$ NH = AM

+) Xét tam giác vuông AMH có:

$AH^2 = AM^2 + MH^2$ (Định lý Py – ta – go)

$\Leftrightarrow AH^2 = MH^2 + NH^2$ (do AM = NH – cmt)

$\Leftrightarrow BH.CH = BM.AM + AN.CN$ (đpcm)

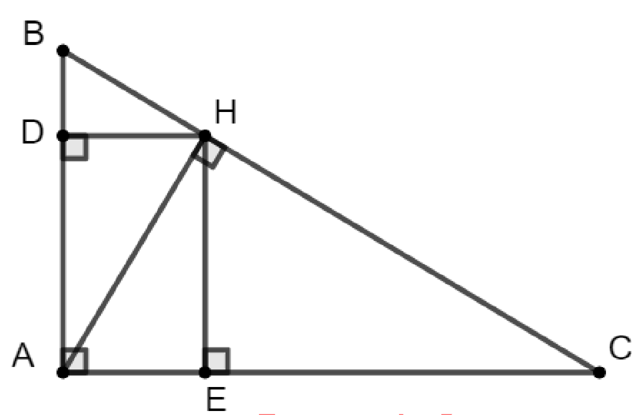
Vậy $HB.HC = MA.MB + NA.NC$.

Ví dụ 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Hãy chứng minh:

a) $\dfrac{HC}{HB} = \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2$

b) $AH^3 = BC.BD.CE$

Bài giải:



a) Áp dụng hệ thức lượng cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH ta có:

$$\begin{cases} AB^2 = HB.BC \\ AC^2 = HC.BC \end{cases} \Rightarrow \dfrac{HC}{HB} = \dfrac{AC^2}{AB^2} = \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2$$

Vậy $\dfrac{HC}{HB} = \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2$

b)

+) Xét $\triangle ABH$ có: $AH \perp BC \Rightarrow AHB = AHC = 90^0$

$\Rightarrow \triangle ABH$ vuông tại H

Mà $HD \perp AB \Rightarrow BH^2 = BD.AB$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Chứng minh tương tự ta có: $CH^2 = EC.AC$

+) Xét tam giác ABC có:

$AH^2 = BH.CH$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Leftrightarrow AH^4 = BH^2.CH^2$

$\Rightarrow AH^4 = BD.AB.AC.EC$

$\Leftrightarrow AH^4 = BD.CE.(AB.AC)$

Mặt khác $AB.AC = AH.BC$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Leftrightarrow AH^4 = BD.CE.AH.BC$

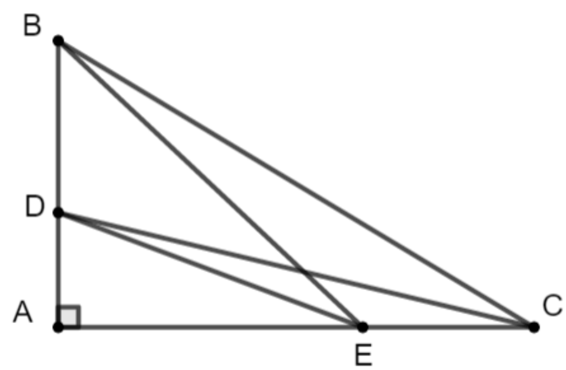
Do AH > 0 nên chia cả hai vế cho AH ta được:

$\Leftrightarrow AH^3 = BD.CE.BC$ (đpcm)

Vậy $AH^3 = BC.BD.CE$.

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên AB lấy điểm D, trên AC lấy điểm E. Chứng minh: $CD^2 + BE^2 = CB^2 + DE^2$

Bài giải:



Áp dụng định lý Py – ta – go cho các tam giác $\triangle ADC, \triangle ABE$ có:

$$\begin{cases} CD^2 = AD^2 + AC^2 \\ BE^2 = AB^2 + AE^2 \end{cases} \Rightarrow CD^2 + BE^2 = AD^2 + AC^2 + AB^2 + AE^2 \quad (1)$$

Mặt khác áp dụng định lý Py – ta – go cho $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ có:

$$\begin{cases} AB^2 + AC^2 = BC^2 \\ AD^2 + AE^2 = DE^2 \end{cases} \quad (2)$$

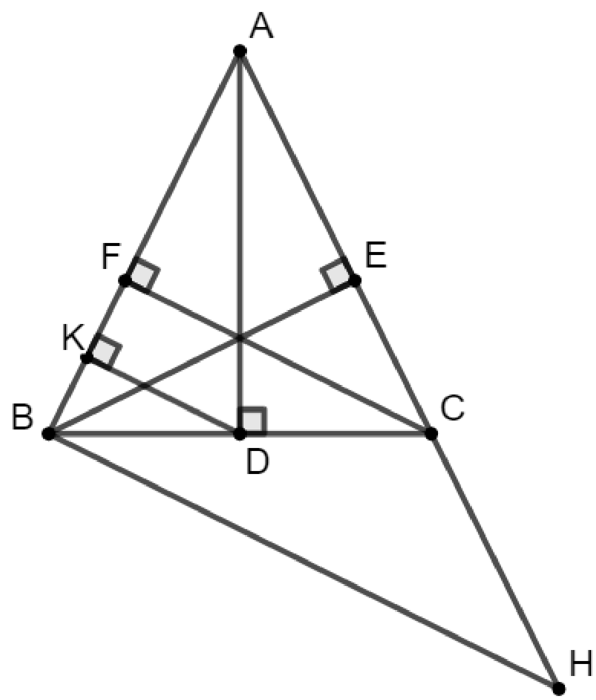
Từ (1) và (2) suy ra: $CD^2 + BE^2 = CB^2 + DE^2$ - đpcm

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC cân tại A, ba đường cao AD, BE, CF. Đường thẳng qua B và song song với CF cắt đường thẳng AC tại H. Chứng minh rằng:

a) AC là trung bình nhân của AE và AH

b) $\frac{1}{CF^2}=\frac{1}{BC^2}+\frac{1}{4AD^2}$

Bài giải:



a) Ta có $\begin{cases} BH//CF(gt) \\ CF\perp AB(gt) \end{cases} \Rightarrow BH\perp AB$

Xét $\triangle ABH$ vuông tại B có BE là đường cao nên $AB^2=AH.AE$

Mà $\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow AB=AC$ do đó $AC^2=AB^2=AH.AE$

Vậy $AC^2=AH.AE$.

b)

+) Xét $\triangle ABC$ cân tại A có AD là đường cao

$\Rightarrow$ AD cũng đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow$ BD = CD $=\frac{1}{2}BC$

Từ D dựng $DK \perp AB\left(K \in AB\right)$ Mà $CF \perp AB\left(gt\right)$

$\Rightarrow KD//CF$ +) Xét $\triangle BFC$ có: $\begin{cases} BD = DC\left(cmt\right) \\ KD//CF\left(cmt\right) \end{cases} \Rightarrow BK = FK$

$\Rightarrow$DK là đường trung bình của $\triangle BFC \Rightarrow KD = \frac{1}{2}CF$

+) Xét $\triangle ABD$ vuông tại D có: $KD \perp AB\left(gt\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{KD^2} = \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{AD^2}$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Mặt khác $\begin{cases} KD = \frac{1}{2}CF\left(cmt\right) \\ BD = \frac{1}{2}BC\left(cmt\right) \end{cases}$ nên ta được:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}CF\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}BC\right)^2} + \frac{1}{AD^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{4}CF^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}BC^2} + \frac{1}{AD^2}$$

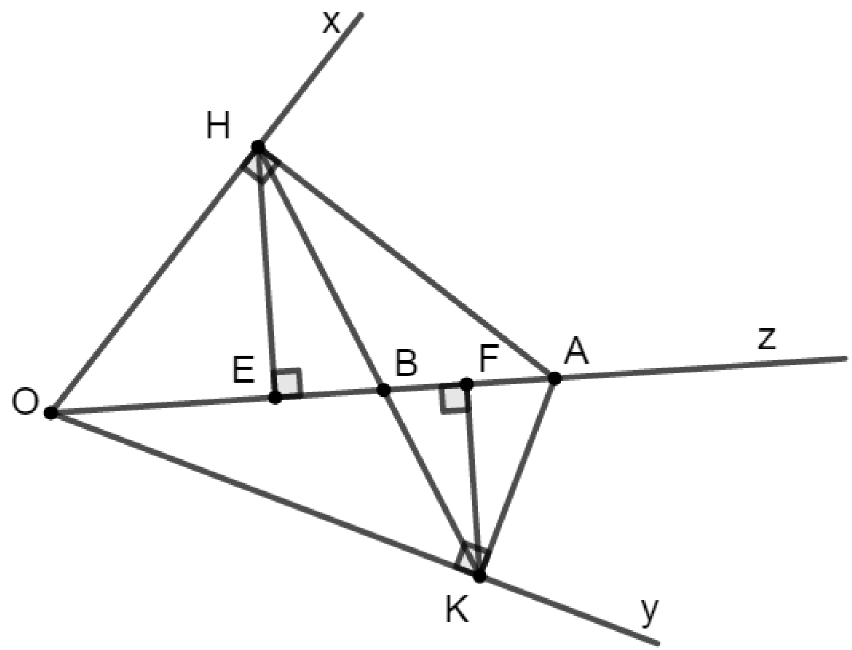
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}.\frac{1}{\frac{1}{4}CF^2} = \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{\frac{1}{4}BC^2} + \frac{1}{AD^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{CF^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AD^2} \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 7: Cho góc xOy và tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Oy. Từ điểm A trên tia Oz vẽ $AH \perp Ox, AK \perp Oy$. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của H và K trên Oz, gọi B là giao điểm của HK và Oz. Chứng minh rằng:

$$\frac{EA.EO}{FA.FO}=\frac{BH^2}{BK^2}$$

Bài giải:



+) Xét $\triangle OHA$ vuông tại H có $HE\perp OA(gt)$

$\Rightarrow HE^2=EA.EO$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông) (1)

+) Xét $\triangle OKA$ vuông tại H có $KF\perp OA(gt)$

$\Rightarrow KF^2=FA.FO$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{HE^2}{KF^2}=\frac{EA.EO}{FA.FO} \quad (3)$$

+) Xét $\triangle HEB$ và $\triangle KFB$ có:

$HEB = KFB = 90^\circ$ (do $HE \perp OA; KF \perp OA$)

$HBE = KBF$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle HEB \backsim \triangle KFB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{HE}{KF} = \dfrac{HB}{KB} \Rightarrow \dfrac{HE^2}{KF^2} = \dfrac{HB^2}{KB^2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\Rightarrow \dfrac{HE^2}{KF^2} = \dfrac{HB^2}{KB^2} = \dfrac{EA.EO}{FA.FO}$

Vậy $\dfrac{EA.EO}{FA.FO} = \dfrac{BH^2}{BK^2}$ (đpcm).