Chủ đề: Góc có đỉnh ở bên trong và bên ngoài đường tròn.

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc, chứng minh các hệ thức.

A. Phương pháp giải

+ Ta thường sử dụng các kiến thức về số đo của góc có đỉnh bên trong và bên ngoài đường tròn, góc nội tiếp, góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung để chứng minh các góc bằng nhau.

- Các góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung

- Tính số đo góc cụ thể

+ Chứng minh hai đường thẳng vuông góc bằng cách:

- Chứng minh góc tạo bởi hai đường thẳng bằng 90°

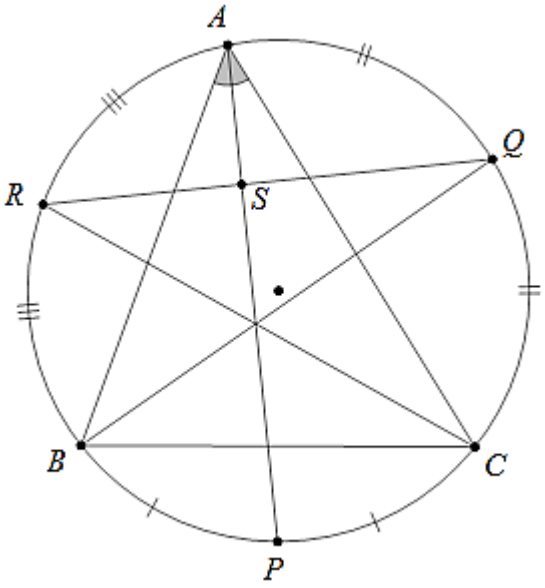
- Từ song song đến vuông góc

- Đường trung trực, đường cao,…

B. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi P, Q, R lần lượt là giao điểm của các tia phân giác trong góc A, B, C với đường tròn. Chứng minh: AP ⊥ QR

Hướng dẫn:



Ta có: $BAP = CAP$ (vì AP là tia phân giác của góc BAC)

Mà BAP, CAP lần lượt là các góc nội tiếp chắn cung BP và CP.

$\Rightarrow BP = PC$

Tương tự $AQ = CQ, AR = BR$

Gọi S là giao điểm của AP và QR. Khi đó:

ASQ là góc có đỉnh nằm trong đường tròn chắn cung AQ và RP.

$\Rightarrow ASQ = \frac{1}{2}\left(sđ AQ + sđ PR\right)$

Vì $sđ AQ = \frac{1}{2} sđ AC, sđ PR = sđ BP + sđ BR = \frac{1}{2} sđ BC + \frac{1}{2} sđ AB$

$\Rightarrow ASQ = \frac{1}{2}\left(sđ AQ + sđ PR\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} sđ AC + \frac{1}{2} sđ BC + \frac{1}{2} sđ AB\right)$

$= \frac{1}{4}\left(sđ AC + sđ BC + sđ AB\right)$

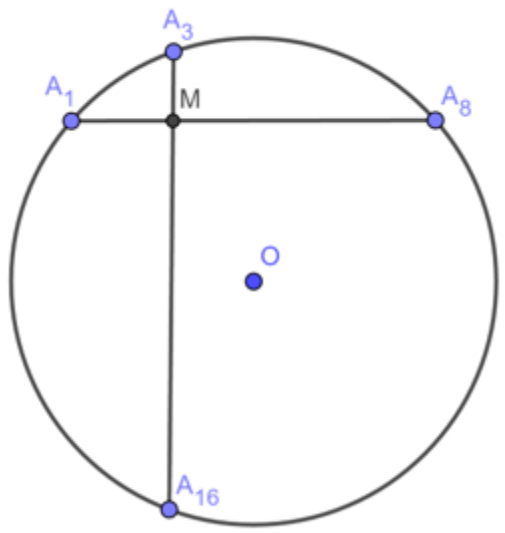
$= \frac{1}{4}.360° = 90°$

$\Rightarrow AP \perp QR$

Vậy $AP \perp QR$

Ví dụ 2: Các điểm $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{19}, A_{20}$ được sắp xếp theo thứ tự đó trên đường tròn (O) và chia đường tròn thành 20 cung bằng nhau.Chứng minh rằng dây A_1A_8 vuông góc với dây A_3A_{16}

Hướng dẫn giải:



Gọi giao điểm của A_1A_8 và A_3A_{16} là M.

Vì đường tròn được chia thành 20 cung bằng nhau nên số đo của mỗi cung là :

360° : 20 = 18°

Ta có: $sđ A_1A_3 = 2.18° = 36°$ và $sđ A_8A_{16} = 8.18° = 144°$

Vì A_1MA_3 là góc có đỉnh bên trong đường tròn (O) nên:

$$A_1MA_3 = \frac{sđ A_1A_3 + sđ A_8A_{16}}{2} = \frac{36° + 144°}{2} = 90°$$

Suy ra $A_1A_8 \perp A_3A_{16}$

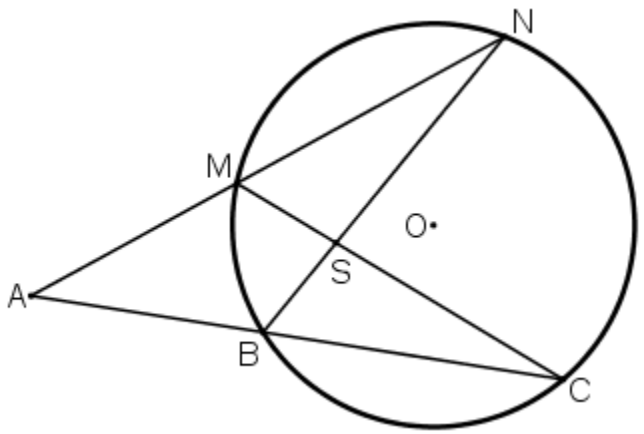
Vậy dây A_1A_8 vuông góc với dây A_3A_{16}.

Ví dụ 3: Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai cát tuyến ABC và AMN sao cho hai đường thẳng BN và CM cắt nhau tại một điểm S nằm bên tròn đường tròn.

Chứng minh $A + BSM = 2CMN$.

Hướng dẫn giải

VIETJACK.COM



Góc A là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn (O) chắn hai cung NC và BM

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(sđNC - sđMB\right)$$

Góc BSM là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn (O) chắn hai cung NC và BM

$$\Rightarrow BSM = \frac{1}{2}\left(sđNC + sđMB\right)$$

$$\Rightarrow A + BSM = \frac{1}{2}\left(sđNC - sđMB\right) + \frac{1}{2}\left(sđNC + sđMB\right) = sđNC \ (1)$$

Ta có CMN là góc nội tiếp chắn cung NC

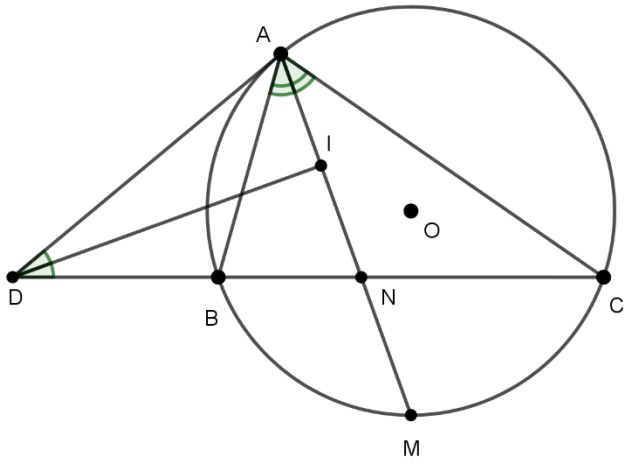
$$\Rightarrow CMN = \frac{1}{2}sđNC \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A + BSM = 2CMN$.

Ví dụ 4: A, B, C là ba điểm thuộc đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến tại A cắt tia BC tại D.Tia phân giác của góc (BAC) cắt đường tròn ở M, tia phân giác của góc D cắt AM ở I. Chứng minh DI ⊥ AM.

Hướng dẫn giải:

VIETJACK.COM



Ta có $BAM = CAM$ (AM là tia phân giác của BAC)

$\Rightarrow BM = CM$

Gọi N là giao điểm của BD và AM

Ta có: $AND = \frac{1}{2}\left(sđ\,AC + sđ\,BM\right)$ (góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn chắn hai cung AC, BM)

$\Rightarrow AND = \frac{1}{2}\left(sđ\,AC + sđ\,CM\right) = \frac{1}{2}sđ\,AM$

Ta lại có: $DAM = \frac{1}{2}sđ\,AM$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung AM)

$\Rightarrow AND = DAM$

Suy ra tam giác AND cân tại D

Tam giác AND cân tại D có DI là tia phân giác nên DI cũng là đường cao

Suy ra: DI ⊥ AM hay DI ⊥ AM

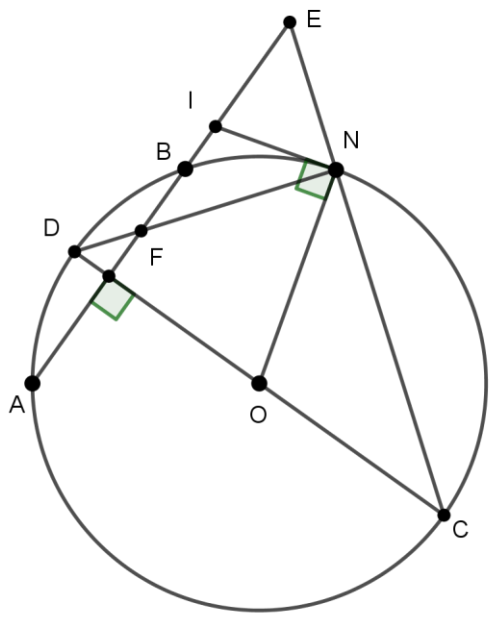
Ví dụ 5: Cho đường tròn tâm O và dây cung AB. Vẽ đường kính CD vuông góc với AB (D thuộc cung nhỏ AB). Trên cung BC nhỏ, lấy điểm N. Các đường thẳng CN, DN cắt AB lần lượt tại E,F. Tiếp tuyến tại N của (O) cắt AB tại I. Chứng minh

a) Tam giác IEN, IFN cân

VIETJACK.COM

b) $AI = \dfrac{AE + AF}{2}$

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $IND = \dfrac{1}{2} sđ ND$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung chắn cung ND)

$IFN = \dfrac{1}{2}\left(sđ BN + sđ AD\right) = \dfrac{1}{2}\left(sđ BN + sđ DB\right) = \dfrac{1}{2} sđ DN$ (góc có đỉnh nằm ở bên trong đường tròn)

$\Rightarrow IND = IFN \Rightarrow \Delta IFN$ cân tại I

+ Gọi H là giao của CD và AB

Xét tam giác vuông EHC, có: $IEN + DCN = 90°$

Ta lại có: $FNI + INE = 90°$ (hai góc phụ nhau)

Mà $DCN = FNI$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung DN)

Suy ra $IEN = INE \Rightarrow \Delta IEN$ cân tại I.

b) Từ a ta có: IN=IF=IE

VIETJACK.COM

AE+AF=AF+IE+IF+AF=AF+IF+IF+AF=2AI

$\Rightarrow AI = \dfrac{AE + AF}{2}$.

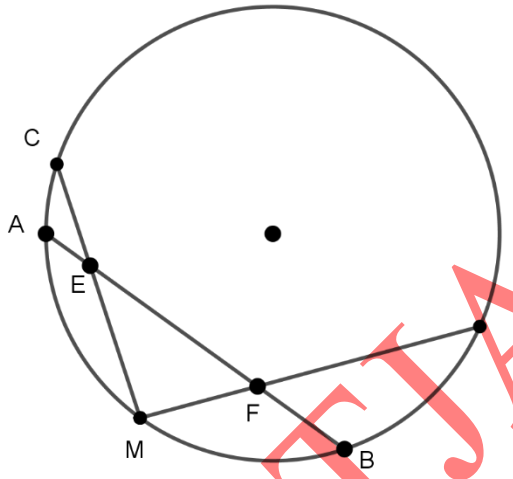
C. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho đường tròn tâm O bán kính R và dây AB bất kỳ. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. E và F là hai điểm bất kỳ trên dây AB. Gọi C và D tương ứng là giao điểm của ME, MF của đường tròn (O). Tính tổng $EFD + ECD$

A. 360° B. 180° C. 270° D. 90°

Hướng dẫn giải:

Đáp án B



Ta có M là điểm chính giữa cung nhỏ AB

$\Rightarrow sđ\,MA = sđ\,MB$ (1)

$EFD = \dfrac{1}{2}\left(sđ\,AD + sđ\,MB\right) = \dfrac{1}{2}\left(sđ\,AD + sđ\,MA\right)$(góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn chắn hai cung MB và AD)

$ECD = \dfrac{1}{2} sđ\,MD$ (góc nội tiếp chắn cung MD)

VIETJACK.COM

$\Rightarrow EFD + ECD = \frac{1}{2}\left(sđ\,AD + sđ\,MA\right) + \frac{1}{2}sđ\,MD = \frac{1}{2}\left(sđ\,AD + sđ\,MA + sđ\,MD\right) = \frac{1}{2}.360° = 180°$

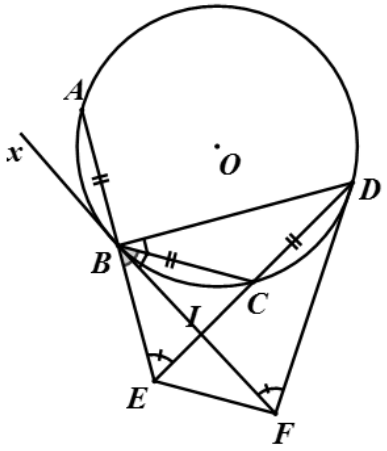
Câu 2: Trên đường tròn (O; R) đặt liên tiếp các dây cung: AB = BC = CD < R. AB cắt CD tại E. Tiếp tuyến tại B và D với đường tròn (O) cắt nhau tại F. Biểu thức nào dưới đây đúng:

A. $\frac{EB}{FB} = \frac{BC}{BD}$ B. EB.BC=FB.BD

C. $\frac{EB}{FD} = \frac{BC}{BD}$ D. EB.BD=FD.BC

Hướng dẫn giải

Đáp án A



Ta có: $AED = \frac{1}{2}\left(sđ\,AD - sđ\,BC\right)$ (góc có đỉnh năm bên ngoài đường tròn chắn hai cung AD và BC) (1)

$BFD = \frac{1}{2}\left(sđ\,BAD - sđ\,BCD\right)$ (góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn chắn cung AD)

Mà AB=CB=CD$\Rightarrow AB = BC = CD$

VIETJACK.COM

$\Rightarrow BFD = \frac{1}{2}\left(sđBAD - sđBC - sđCD\right)$

$= \frac{1}{2}\left(sđBAD - sđAB - sđBC\right)$

$= \frac{1}{2}\left(sđAD - sđBC\right)(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AED = BFD$

Ta có: CBD là góc nội tiếp chắn cung CD

FBC, ABx là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung lần lượt chắn các cung BC, AB.

Mà $AB = BC = CD$

$\Rightarrow CBD = FBC = ABx$

Mà $ABx = EBF$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow CBD = FBC = EBF$

$\Rightarrow EBC = FBD$

Xét ΔEBC và ΔFBD, ta có:

$AED = BFD$

$EBC = FBD$

$\Rightarrow \Delta EBC \sim \Delta FBD(g-g)$

$\Rightarrow \frac{EB}{FB} = \frac{BC}{BD}$

Câu 3: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, C là điểm tùy ý trên nửa đường tròn.Tiếp tuyến của (O) tại A cắt tia BC tại D.Tia phân giác của góc BAC cắt dây BC tại M và cung BC tại N. ΔDAM là tam giác gì?

A.Tam giác vuông

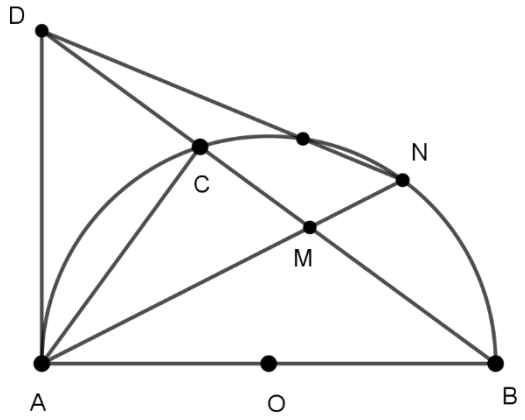
B.Tam giác vuông cân

C.Tam giác cân

D.Tam giác đều

Hướng dẫn giải

Đáp án C



Vì AM là phân giác của BAC

$\Rightarrow CAN = BAN \Rightarrow CN = BN$

Ta có: $AMC = \frac{1}{2}\left(sđAC + sđNB\right) = \frac{1}{2}\left(sđAC + sđCN\right) = \frac{1}{2}sđAN$ (góc có đỉnh nằm trong đường tròn chắn cung AC, BN)

Ta lại có: $DAM = \frac{1}{2}sđAN$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung AN)

$\Rightarrow DAM = DMA \Rightarrow \Delta ADM$ cân tại D.

Câu 4: Trên đường tròn (O) lấy ba cung liên tiếp AB=BC=CD sao cho số đo của chúng đều bằng $45°$ .Gọi I là giao điểm của hai tia AB và DC, H là giao điểm của hai dây AC và BD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A.ΔIBC là tam giác vuông

B.ΔIBC là tam giác cân

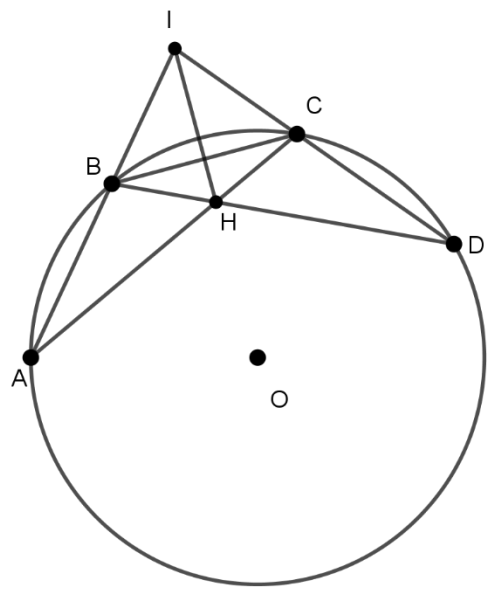
C. ΔIBC là tam giác vuông cân

D. A,B,C đều đúng

VIETJACK.COM

Hướng dẫn giải

Đáp án C



Ta có AB=BC=CD

$\Rightarrow AB = BC = CD \Rightarrow AC = BD$

ADC là góc nội tiếp chắn AC

BAD là góc nội tiếp chắn BD

$\Rightarrow ADC = BAD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow \Delta IAD$ cân tại I $\Rightarrow IA = ID$

Mà AB=CD

$\Rightarrow IB = IC \Rightarrow \Delta IBC$ cân tại I

Ta lại có $BIC = \frac{1}{2}\left(sđ\,AD - sđ\,BC\right)$ (góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn chắn cung AD, BC)

Mặt khác $sđ\,AD = 360° - sđ\,ABCD = 360° - 3sđ\,BC$ (vì $AB = BC = CD$)

$\Rightarrow BIC = \frac{1}{2}\left(sđ\,AD - sđ\,BC\right) = \frac{1}{2}\left(360° - 4sđ\,BC\right) = \frac{1}{2}\left(360° - 4.45°\right) = 90°$

VIETJACK.COM

$\Rightarrow \Delta IBC$ vuông cân.

Câu 5: Cho tam giác đều ABC nội tiếp trog đường tròn tâm O; M là một điểm trên cung nhỏ AC (M khác A và C) sao cho $CAM = 30°$ .Góc giữa hai đường thẳng AC và BM là:

A.45

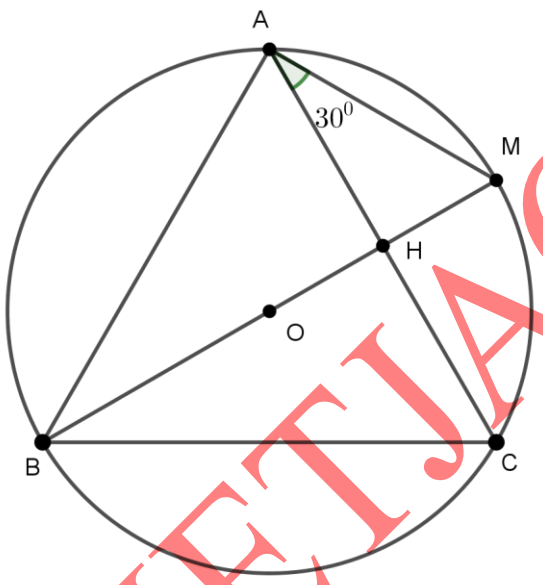
B.60

C.65

D.90

Hướng dẫn giải

Đáp án D



Gọi giao điểm của BM và AC là H

Ta có: $CAM = \frac{1}{2} sđ MC$ (góc nội tiếp chắn cung MC)

$\Rightarrow sđ MC = 2CAM = 2.30° = 60°$

Ta lại có: ΔABC đều

$\Rightarrow ACB = 60°$

VIETJACK.COM

$\Rightarrow sđ\,AB = 2ACB = 2.60° = 120°$ (góc nội tiếp chắn cung AB)

$\Rightarrow CHM = \frac{1}{2}\left(sđ\,CM + sđ\,AB\right) = \frac{1}{2}\left(60° + 120°\right) = 90°$.

VIETJACK.COM