

## Chủ đề: Tứ giác nội tiếp

### Dạng 1. Chứng minh tứ giác nội tiếp. Tính góc

#### A. Phương pháp giải

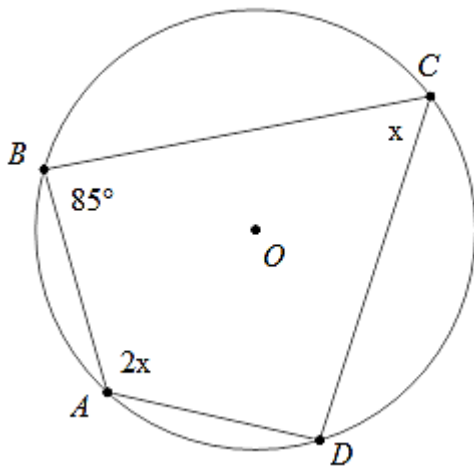
Đối với chứng minh tứ giác nội tiếp, ta sử dụng các dấu hiệu nhận biết sau:

- + Tứ giác có tổng hai góc đối bằng  $180^\circ$ .
- + Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.
- + Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.
- + Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc  $\alpha$ .
- + *Chú ý:* Để chứng minh một tứ giác là tứ giác nội tiếp ta có thể chứng minh tứ giác đó là một trong các hình sau: Hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân.

Đối với bài toán tính góc, ta sử dụng các tính chất của tứ giác nội tiếp để tính toán.

#### B. Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Tính số đo các góc của tứ giác ABCD



#### Hướng dẫn giải:

Do ABCD là tứ giác nội tiếp nên  $A + C = B + D = 180^\circ$

Vì  $B = 85^\circ$  nên  $D = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$

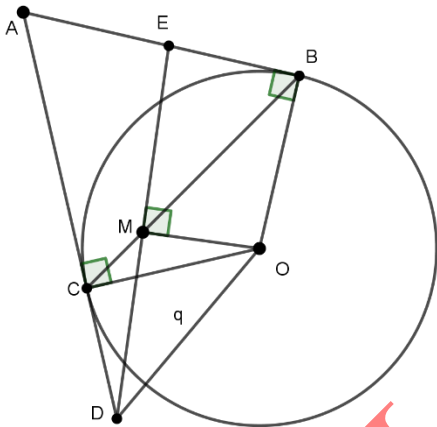
Ta có:  $A + C = 180^\circ \Leftrightarrow 2x + x = 180^\circ \Leftrightarrow 3x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ$

$\Rightarrow A = 2.60^\circ = 120^\circ; C = 60^\circ$

Vậy  $A = 120^\circ; C = 60^\circ; B = 85^\circ; D = 95^\circ$ .

**Ví dụ 2:** Cho đường tròn tâm O. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). Trên BC lấy điểm M, vẽ đường thẳng vuông góc với OM tại M, cắt AB và AC lần lượt tại E và D. Chứng minh các tứ giác EBOM và DCMO nội tiếp được trong đường tròn. Xác định tâm các đường tròn đó.

### Hướng dẫn giải



– Chứng minh tứ giác EBOM nội tiếp

Có  $OM \perp ME$  (gt) nên góc  $OME = 90^\circ$

$OB \perp BE$  (BE là tiếp tuyến của (O)) nên góc  $OBE = 90^\circ$

$\Rightarrow OME + OBE = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$  Tứ giác EBOM nội tiếp trong đường tròn đường kính OE.

– Chứng minh tứ giác DCMO nội tiếp

Có  $OM \perp DM$  (gt) nên góc  $OMD = 90^\circ$

$CD \perp OC$  (CD là tiếp tuyến của (O)) nên góc  $OCD = 90^\circ$

Nên M, C là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn OD dưới một góc  $90^\circ$

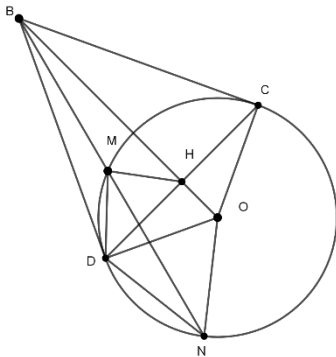
⇒ Tứ giác DCMO nội tiếp trong đường tròn đường kính OD.

**Ví dụ 3:** Qua điểm B nằm ở bên ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến BC và BD với đường tròn (O), (C, D là các tiếp điểm). Từ B vẽ cát tuyến BMN (M nằm giữa B và N, tia BN nằm giữa hai tia BC và BO), gọi H là giao điểm của BO và CD.

a. Chứng minh  $BM \cdot BN = BH \cdot BO$ .

b. Chứng minh tứ giác OHMN nội tiếp.

### Hướng dẫn giải



a. Ta có:  $BC = BD$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$OC = OD$  (bán kính đường tròn (O))

⇒ BO là đường trung trực của CD ⇒  $BO \perp CD$  (1)

Xét  $\triangle BMC$  và  $\triangle BCN$  có:

$\angle CBN$  : chung

$\angle MCB = \angle CNB$  (cùng chắn cung  $CM$ )

⇒  $\triangle BMC \sim \triangle BCN$  (g - g)

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BC}{BN} \Rightarrow BM \cdot BN = BC^2 \quad (2)$$

Do (1) ta có  $\triangle BCO$  vuông tại C, đường cao CH:

$$\Rightarrow BC^2 = BH \cdot BO \quad (\text{hệ thức lượng trong tam giác vuông}) \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ⇒  $BM \cdot BN = BH \cdot BO$ .

b. Ta có:  $BM \cdot BN = BH \cdot BO$  (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \frac{BM}{BO} = \frac{BH}{BN}$$

$\triangle BMO$  và  $\triangle BHN$  có:

$OBN$ : chung

$$\frac{BM}{BO} = \frac{BH}{BN}$$

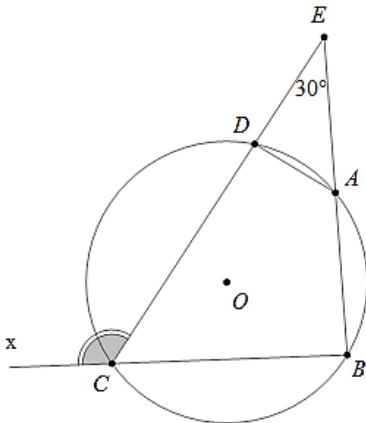
$$\Rightarrow \triangle BMO \sim \triangle BHN \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \angle MOH = \angle HNM \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $OHMN$  nội tiếp (hai góc bằng nhau cùng nhìn một cạnh).

### C. Bài tập trắc nghiệm

**Câu 1:** Cho hình vẽ sau, biết  $\angle DCx = 130^\circ$ . Đáp án nào sau đây SAI



- A.  $\angle DCB = 50^\circ$       B.  $\angle DAB = 130^\circ$       C.  $\angle ADC = 80^\circ$       D.  $\angle ABC = 130^\circ$

### Hướng dẫn giải

Đáp án D

Ta có:  $\angle DCB = 180^\circ - \angle DCx = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$  (hai góc kề bù)

Ta lại có:  $\angle DAB = 180^\circ - \angle DCB = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$  (ABCD là tứ giác nội tiếp đường tròn)

Lại có  $DCx$  là góc ngoài của  $\triangle ECB$

$$\Rightarrow DCx = ABC + BEC$$

$$\Leftrightarrow 130^\circ = ABC + 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow ABC = 130^\circ - 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow ABC = 100^\circ$$

$$\Rightarrow ADC = 180^\circ - ABC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \text{ (ABCD là tứ giác nội tiếp đường tròn)}$$

Vậy  $DCB = 50^\circ$ ,  $DAB = 130^\circ$ ,  $ADC = 80^\circ$ ,  $ABC = 100^\circ$ .

**Câu 2:** Phát biểu nào sau đây sai ?

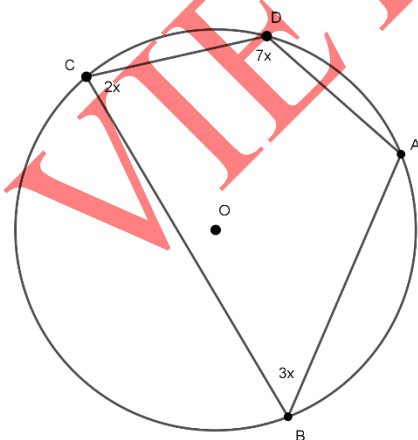
- A. Tứ giác nội tiếp có 4 đỉnh cùng nằm trên cùng một đường tròn
- B. Nếu một tứ giác có tổng hai góc đối bằng  $180^\circ$  thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.
- C. Trong một tứ giác nội tiếp tổng hai góc bất kì bằng  $180^\circ$
- D. Hình chữ nhật luôn nội tiếp đường tròn.

**Hướng dẫn giải**

Đáp án C

Trong tứ giác nội tiếp, tổng hai góc đối mới bằng  $180^\circ$ .

**Câu 3:** Số đo góc A trong hình vẽ



A.  $A = 72^\circ$

B.  $A = 108^\circ$

C.  $A = 18^\circ$

D.  $A = 144^\circ$

**Hướng dẫn giải**

Đáp án D

Ta có tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O)

$$\Rightarrow D + B = 7x + 3x = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 10x = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 18^\circ$$

$$\Rightarrow C = 2.18^\circ = 36^\circ$$

Mà  $A + C = 180^\circ$

$$\Rightarrow A = 180^\circ - C = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ.$$

**Câu 4:** Các hình nào sau đây nội tiếp đường tròn?

- A. Hình thang, hình chữ nhật
- B. Hình thang cân, hình bình hành
- C. Hình thoi, hình vuông
- D. Hình thang cân, hình chữ nhật, hình vuông

**Hướng dẫn giải**

Đáp án D

Hình thang cân, hình chữ nhật, hình vuông là các hình nội tiếp đường tròn.

**Câu 5:** Cho tam giác nhọn ABC. Đường tròn đường kính BC cắt AB và AC theo thứ tự tại D và E. Gọi H là giao điểm của BE và CD. Tia AH cắt BC tại F. Số tứ giác nội tiếp có trong hình vẽ là:

- A. 4                      B. 6                      C. 7                      D. 8

**Hướng dẫn giải**

Đáp án B

Các tứ giác nội tiếp ADHE, BDHF, FHEC, BDEC, AEFB, ADFC.

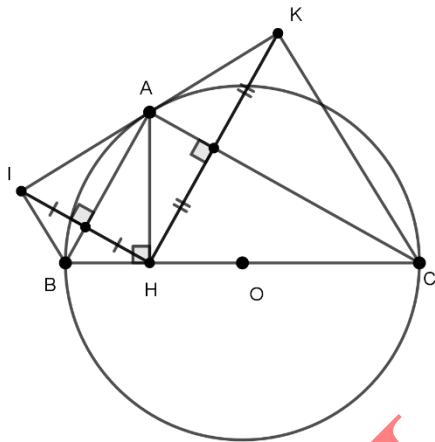
Vậy có 6 tứ giác nội tiếp.

**Câu 6:** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH nội tiếp đường tròn (O;R) gọi I và K theo thứ tự là điểm đối xứng của H qua hai cạnh AB và AC. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Tứ giác AHBI nội tiếp đường tròn đường kính AB
- B. Tứ giác AHCK nội tiếp đường tròn đường kính AC
- C. Ba điểm I, A, K thẳng hàng
- D. A, B, C đều đúng.

### Hướng dẫn giải

Đáp án D



Ta có  $AH \perp BC \Rightarrow \angle AHB = \angle AHC = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle AIB = \angle AHB = 90^\circ$  ( I đối xứng với H qua AB)

Và  $\angle AHC = \angle AKC = 90^\circ$  ( K đối xứng với H qua AC)

Xét tứ giác AIBH, có:  $\angle AIB + \angle AHB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$  Tứ giác AIBH nội tiếp đường tròn đường kính AB

Xét tứ giác AKCH, có:  $\angle AKC + \angle AHC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$  Tứ giác AKCH nội tiếp đường tròn đường kính AC

Ta lại có:  $\angle IAB = \angle HAB, \angle KAC = \angle HAC$  (do tính chất đối xứng)

Mà  $\angle HAB + \angle HAC = 90^\circ$

$$\Rightarrow IAB + KAC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow IAB + KAC + HAB + HAC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Suy ra ba điểm I, A, K thẳng hàng.

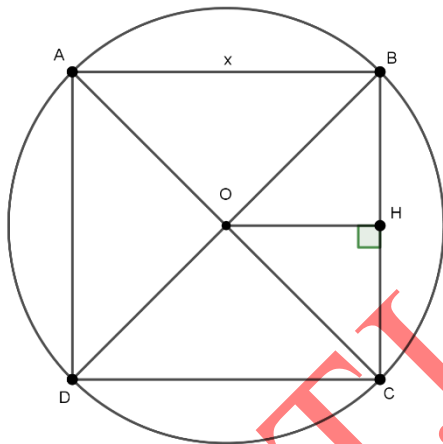
Do đó, cả A, B, C đều đúng.

**Câu 7:** Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O;R). Độ dài cạnh hình vuông bằng:

- A.  $\sqrt{2}R$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}R$       C.  $\frac{R}{\sqrt{2}}$       D.  $2R$

### Hướng dẫn giải

Đáp án A



Đặt cạnh góc vuông là x

Ta có hình vuông ABCD nội tiếp (O; R)

Nên O là giao điểm của hai đường chéo, và  $OA = OB = OC = OD = R$ .

Kẻ OH vuông góc với BC.

Tam giác OBC vuông cân tại O, có  $OH \perp BC$

$\Rightarrow$  H là trung điểm của BC

$$\Rightarrow OH = BH = \frac{1}{2}BC = \frac{x}{2}$$



Xét tam giác OHB vuông tại H, có :

$$OB^2 = OH^2 + BH^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2R^2$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}R$$

Vậy cạnh hình vuông có độ dài là  $\sqrt{2}R$ .

**Câu 8:** Hình nào sau đây không nội tiếp đường tròn?

- A. Hình vuông
- B. Hình chữ nhật
- C. Hình thoi
- D. Hình thang cân

**Hướng dẫn giải**

Đáp án C

Hình vuông, hình chữ nhật và hình thang cân là các hình nội tiếp đường tròn.

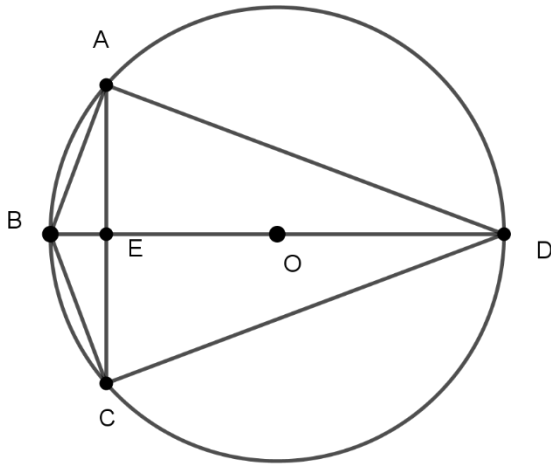
Hình thoi là hình không nội tiếp đường tròn.

**Câu 9:** Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) đường kính BD. Các đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Biết rằng  $AB = BC = 7,5\text{cm}$  và  $\angle ABC = 2\angle ADC$ . Tính độ dài đường kính BD.

- A. 11cm
- B. 12cm
- C. 14cm
- D. 15cm

**Hướng dẫn giải**

Đáp án D



Do tứ giác ABCD nội tiếp (O) nên:  $ABC + ADC = 180^\circ$

Mà  $ABC = 2ADC$

$$\Leftrightarrow 2ADC + ADC = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 3ADC = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow ADC = 60^\circ$$

Ta có  $ADB$  là góc nội tiếp chắn  $AB$

$CDB$  là góc nội tiếp chắn  $BC$

Mà  $AB = BC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{BC}$

$\Rightarrow ADB = CDB$  (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$$\Rightarrow ADB = CDB = \frac{1}{2}ADC = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

Ta có:  $BAD = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$  tam giác ABD vuông tại A

$$\sin ADB = \frac{AB}{BD} \Leftrightarrow DB = \frac{AB}{\sin ADB} = \frac{7,5}{\sin 30^\circ} = 15 \text{ cm.}$$

**Câu 10:** Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn. Kéo dài AB về phía B một đoạn BE. Biết  $ADC = 92^\circ$ . Số đo góc EBC là:

A.66

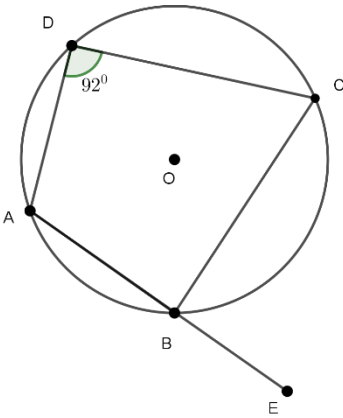
B.92

C.70

D.88

### Hướng dẫn giải

Đáp án B



Vì tứ giác ABCD nội tiếp nên:  $ADC + ABC = 180^\circ$

Mà:  $EBC + ABC = 180^\circ$  (hai góc kề bù)

$\Rightarrow EBC = ADC = 92^\circ$