

### Dạng 3 : Dựng cung chứa góc

#### A. Phương pháp giải

Cho đoạn thẳng AB. Dựng cung chứa góc  $\alpha$  dựng trên đoạn AB

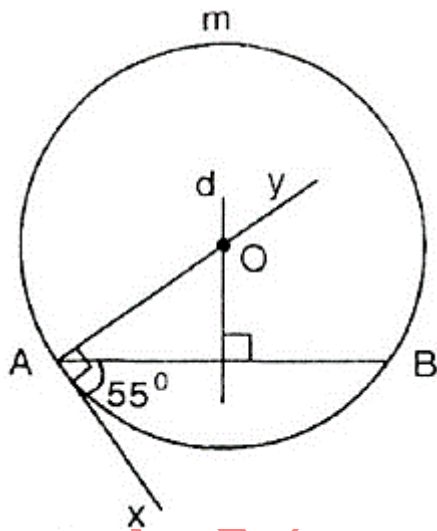
Thực hiện quy trình dựng sau đây :

- + Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB;
- + Vẽ tia Ax tạo với AB một góc  $\alpha$  ;
- + Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax. Gọi O là giao điểm của Ay với d;
- + Vẽ cung AmB , tâm O, bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax. Cung AmB được vẽ như trên là một cung chứa góc  $\alpha$ .

#### B. Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Dựng một cung chứa góc  $55^\circ$  trên đoạn thẳng  $AB = 3\text{cm}$ .

**Lời giải**



**Cách dựng:**

- + Dựng đoạn thẳng  $AB = 3\text{cm}$ .
- + Dựng đường trung trực d của đoạn thẳng AB.
- + Dựng góc  $xAB = 55^\circ$
- + Dựng tia Ay vuông góc với tia Ax.

+ d cắt Ay tại O.

+ Dựng đường tròn tâm O, bán kính OA.

$AmB$  là cung chứa góc  $55^\circ$  cần dựng.

*Chứng minh:*

+ O thuộc đường trung trực của AB

$\Rightarrow OA = OB$

$\Rightarrow B$  thuộc đường tròn (O; OA).

$Ax \perp AO \Rightarrow Ax$  là tiếp tuyến của (O; OA).

$\Rightarrow BAx$  là góc tạo bởi tiếp tuyến Ax và dây AB

Lấy  $M \in AmB \Rightarrow AMB$  là góc nội tiếp chắn cung nhỏ AB

$\Rightarrow BAx = AMB$  ( góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

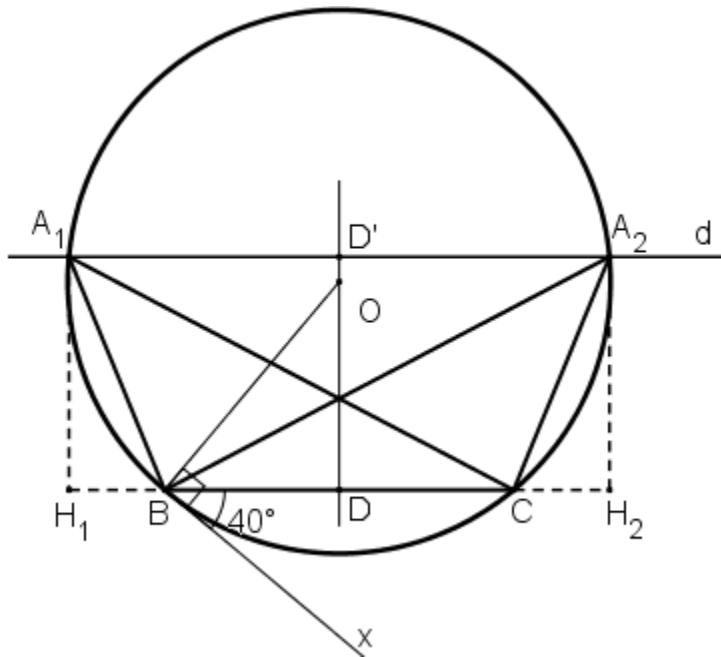
$\Rightarrow AMB = 55^\circ$

$\Rightarrow AmB$  là cung chứa góc  $55^\circ$  dựng trên đoạn AB = 3cm.

*Kết luận:* Bài toán có một nghiệm hình.

**Ví dụ 2:** Dựng tam giác ABC, biết BC = 6cm, góc A =  $40^\circ$  và đường cao AH = 4cm.

**Hướng dẫn giải**



*Cách dựng:*

+ Dựng đoạn thẳng  $BC = 6\text{cm}$ .

+ Dựng tia  $Bx$  sao cho  $\angle CBx = 40^\circ$

+ Dựng tia  $By \perp Bx$ .

+ Dựng đường trung trực của  $BC$  cắt  $By$  tại  $O$ .

+ Dựng đường tròn  $(O; OB)$ .

Cung lớn  $BC$  chính là cung chứa góc  $40^\circ$  dựng trên đoạn  $BC$ .

+ Dựng đường thẳng  $d$  song song với  $BC$  và cách  $BC$  một đoạn  $4\text{cm}$ :

Lấy  $D$  là trung điểm  $BC$ .

Trên đường trung trực của  $BC$  lấy  $D'$  sao cho  $DD' = 4\text{cm}$ .

Dựng đường thẳng  $d$  đi qua  $D'$  và vuông góc với  $DD'$ .

+ Đường thẳng  $d$  cắt cung lớn  $BC$  tại  $A$ .

Ta được  $\triangle ABC$  cần dựng.

*Chứng minh:*

+ Theo cách dựng có  $BC = 6\text{cm}$ .

+ A ∈ cung chứa góc  $40^\circ$  dựng trên đoạn BC

$$\Rightarrow \angle BAC = 40^\circ$$

+ A ∈ d song song với BC và cách BC 4cm

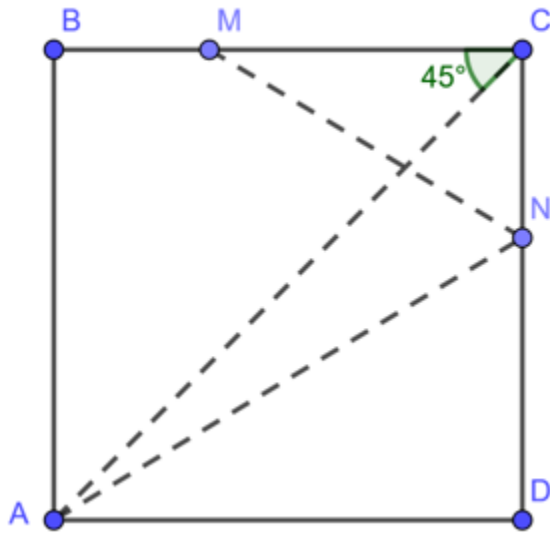
$$\Rightarrow AH = DD' = 4\text{cm.}$$

Vậy  $\triangle ABC$  thỏa mãn yêu cầu đề bài.

*Biện luận:* Do d cắt cung lớn BC tại hai điểm nên bài toán có hai nghiệm hình.

**Ví dụ 3:** Dựng hình vuông ABCD, biết đỉnh A, điểm M thuộc cạnh BC và điểm N thuộc cạnh CD

**Hướng dẫn giải:**



*Phân tích:* Vì ABCD là hình vuông nên:

$$\angle BCD = 90^\circ \text{ hay } \angle MCN = 90^\circ; \angle BCA = 45^\circ \text{ hay } \angle MCA = 45^\circ$$

Ta có, ba điểm A, M, N cố định nên bài toán quy về việc dựng đỉnh C. Đỉnh C là giao điểm của :

- Cung chứa góc  $90^\circ$  dựng trên đoạn thẳng MN
- Cung chứa góc  $45^\circ$  dựng trên đoạn thẳng AM

*Cách dựng:*

- Dựng cung chứa góc  $90^\circ$  trên đoạn MN

- Dựng cung chứa góc  $45^\circ$  trên đoạn AM

Hai cung cắt nhau tại C

- Nối CM, CN

- kẻ  $AB \perp CM$  tại B,  $AD \perp CN$  tại D

Tứ giác ABCD là hình vuông cần dựng.

*Chứng minh:*

Ta có: C thuộc cung chứa góc  $90^\circ$  dựng trên đoạn MN  $\Rightarrow MCN = 90^\circ$

Ta lại có  $AB \perp CM \Rightarrow ABC = 90^\circ$  và  $AD \perp CN \Rightarrow ADC = 90^\circ$

$\Rightarrow MCN = ABC = ADC = 90^\circ$ . Do đó, tứ giác ABCD là hình chữ nhật

Ta lại có: C thuộc cung chứa góc  $45^\circ$  dựng trên cạnh AM  $\Rightarrow ACM = 45^\circ$

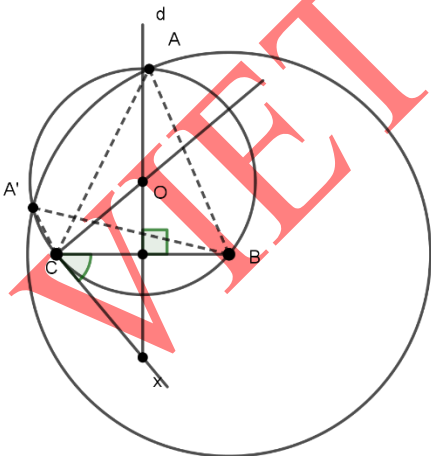
$\Rightarrow \Delta ACB$  vuông cân tại A

$\Rightarrow AB = AC$

$\Rightarrow ABCD$  là hình vuông.

**Ví dụ 4:** Dựng tam giác ABC biết  $BC = 3\text{cm}$ ,  $A = 50^\circ$  và  $AB = 3,5\text{cm}$ .

**Hướng dẫn giải**



*Phân tích:*

Giả sử đã dựng được  $\Delta ABC$  thỏa mãn yêu cầu bài toán, ta thấy:

Đoạn thẳng  $BC = 3\text{cm}$

Điểm A thỏa mãn hai điều kiện:

- Nằm trên cung chứa góc  $50^\circ$  dựng trên đoạn thẳng BC
- Nằm trên đường tròn (B; 3,5 cm)

*Cách dựng:*

- + Vẽ đoạn thẳng  $BC = 3\text{cm}$
- + Dựng cung chứa góc  $50^\circ$  dựng trên đoạn thẳng BC
- + Vẽ đường tròn tâm B, bán kính 3,5 cm
- + Giao của cung chứa góc trên và (B;3,5cm) ta được điểm A
- + Nối A với B, A với C ta được tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu bài toán.

*Chứng minh:*

Xét tam giác ABC, ta có:  $BC = 3\text{cm}$

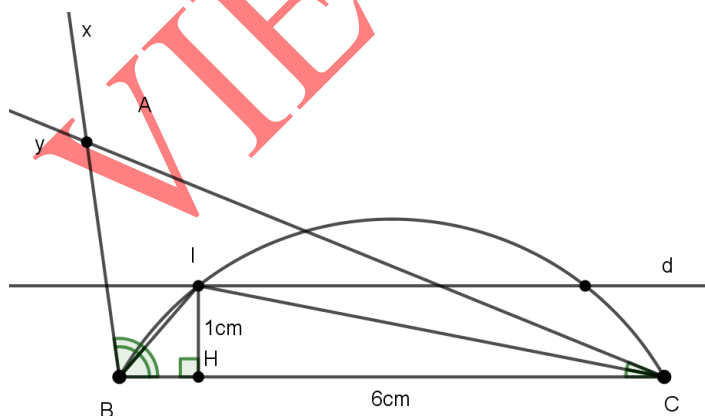
Do A thuộc cung chứa góc  $50^\circ$  dựng trên đoạn thẳng BC nên  $\angle BAC = 50^\circ$

Mặt khác A thuộc (B;3,5 cm) nên  $AB = 3,5\text{ cm}$ .

Bài toán có hai nghiệm hình là các tam giác ABC, A'BC.

**Ví dụ 5:** Dựng tam giác ABC, biết rằng:  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $BC=6\text{cm}$  và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng 1 cm.

*Hướng dẫn giải*



*Phân tích:*

Giả sử dựng được  $\Delta ABC$  thỏa mãn yêu cầu đề bài. Tâm đường tròn nội tiếp  $I$  là giao điểm của ba đường phân giác trong nên  $BIC = 90^\circ + \frac{A}{2} = 90^\circ + \frac{60^\circ}{2} = 120^\circ$ .

Ta thấy:

- $BC = 6\text{cm}$  dựng được
- Điểm  $I$  thỏa mãn hai điều kiện:  $I$  nằm trên cung chứa góc  $120^\circ$  dựng trên đoạn  $BC$  và  $I$  nằm trên đường thẳng  $d//BC$ , cách  $BC$   $1\text{ cm}$ . Suy ra dựng được điểm  $I$ .
- Từ đó dựng được  $BA$  và  $CA$ .

*Cách dựng:*

- Dựng  $BC = 6\text{cm}$ .
- Dựng cung chứa góc  $120^\circ$  trên đoạn thẳng  $BC$ .
- Dựng đường thẳng  $d//BC$  và cách  $BC$  một khoảng  $1\text{cm}$ . Đường thẳng này cắt cung chứa góc tại điểm  $I$ .
- Dựng tia  $Bx$  sao cho  $BI$  là phân giác của  $CBx$  và tia  $Cy$  sao cho  $CI$  là phân giác của  $BCy$ .
- Hai tia  $Bx$  và  $Cy$  cắt nhau tại  $A$ .
- Tam giác  $ABC$  là tam giác phải dựng.

*Chứng minh:*

Ta có  $I$  thuộc cung chứa góc  $120^\circ$  dựng trên đoạn  $BC$  nên  $BIC = 120^\circ$

$$\Rightarrow B_1 + C_1 = 60^\circ$$

Ta lại có:  $BAC = 2B_1$  ( $BI$  là phân giác của  $BAC$ )

$BCA = 2C_1$  ( $CI$  là phân giác của  $ACB$ )

$$\Rightarrow ABC + BCA = 2(B_1 + C_1) = 2.60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Vì I là giao điểm của hai đường phân giác trong góc B và góc C nên I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, hơn nữa ta có khoảng cách từ I đến BC bằng 1 cm nên bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1cm.

*Biện luận :*

Trên nửa mặt phẳng bờ BC, đường thẳng d và cung chứa góc cắt nhau tại hai điểm, hai hình bằng nhau nên bài toán có một nghiệm hình.