Chủ đề: Góc nội tiếp. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

Dạng 3: Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung. Chứng minh hai góc bằng nhau

A. Phương pháp giải

1. Định nghĩa

Cho xy là tiếp tuyến tại A với đường tròn (O).

Góc BAx có đỉnh A nằm trên đường tròn, cạnh Ax là một tia tiếp tuyến còn cạnh kia chứa dây cung AB.

Góc BAx được gọi là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.

Dây AB căng hai cung. Cung nằm bên trong góc là cung bị chắn. Trên hình vẽ, góc ∠BAx có cung bị chắn là cung nhỏ AB , góc BAy có cung bị chắn là cung lớn AB.

2. Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

3. Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

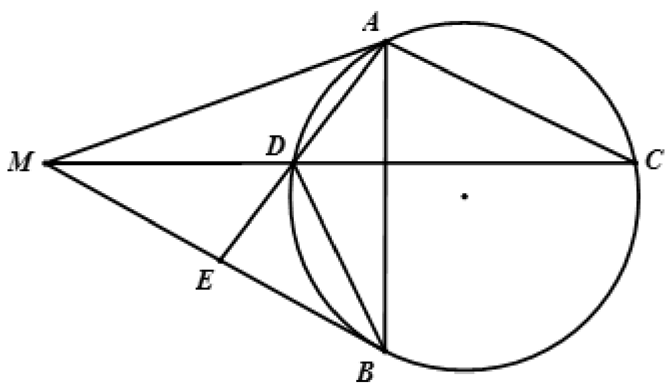
B. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) tại A và B. Qua A vẽ đường thẳng song song với MB cắt đường tròn tại C. Nối C với M cắt đường tròn (O) tại D.Nối A với D cắt MB tại E. Chứng minh rằng:

a) ΔABE ~ ΔBDE; ΔMEA ~ ΔDEM.

b) E là trung điểm của MB.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\widehat{BAE}$ là góc nội tiếp chắn cung DB và $\widehat{DBE}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn DB.

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{DBE}$

Xét ΔABE và ΔBDE có:

Góc E chung

$\widehat{BAE} = \widehat{DBE}$ (cmt)

$\Rightarrow$ ΔABE ~ ΔBDE (g.g)

Vì AC // MB nên $\widehat{ACM} = \widehat{CMB}$ (hai góc so le trong)

Mà $\widehat{ACM} = \widehat{MAE}$ (góc nội tiếp và góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AD)

Suy ra: $\widehat{MAE} = \widehat{CMB}$

Xét ΔMEA và ΔDEM có:

Góc E chung

$\widehat{MAE} = \widehat{CMB}$ (cmt)

$\Rightarrow$ ΔMEA ~ ΔDEM (g.g)

b) Theo chứng minh a) ta có:

ΔABE ~ ΔBDE $\Rightarrow$ AE/BE = BE/DE $\Rightarrow$ EB^2 = AE.DE

ΔMEA ~ ΔDEM ⇒ ME/DE = EA/EM ⇒ ME^2 = DE.EA

Do đó $EB^2 = EM^2$ hay EB = EM.

Vậy E là trung điểm của MB.

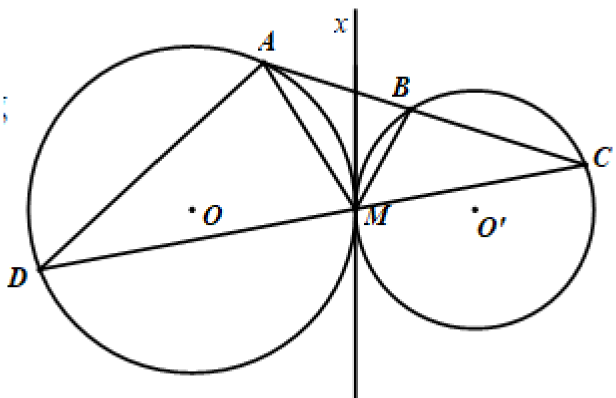
Ví dụ 2: Cho hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài với nhau tại M. Kẻ đường thẳng d tiếp xúc với (O) tại A và cắt (O’) tại B và C (B nằm giữa A và C)

Gọi D là giao điểm của CM và (O). Chứng minh rằng:

a) MA là phân giác của BMD

b) MA^2 = MB.MD

Hướng dẫn giải



a) Kẻ tiếp tuyến chung Mx của hai đường tròn (O) và (O’)

Ta có:

$BAM = AMx$ (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AM của (O)).

$BMx = BCM$ (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung với góc nội tiếp cùng chắn cung MB của (O’)).

Mặt khác $AMD = MAB + MCA$ (AMD là góc ngoài của tam giác AMC)

$\Rightarrow AMD = AMx + BMx = BMA$

Vậy MA là phân giác của BMD.

b) Xét ΔMAD và ΔMBA có:

$AMD = BMA$ (cmt)

$ADM = BAM$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

$\Rightarrow$ ΔMAD ~ ΔMBA (g.g)

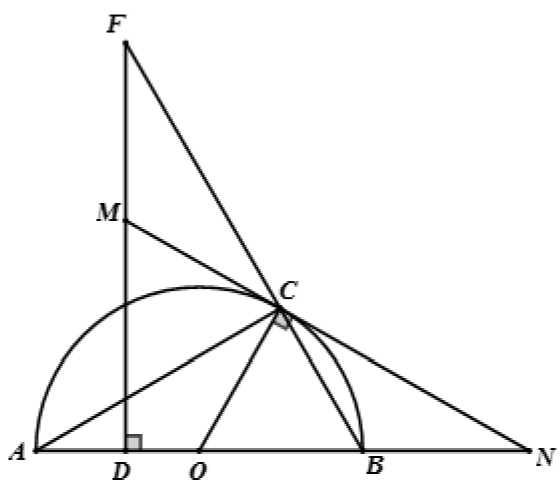
$\Rightarrow$ MA/MB = MD/MA hay MA^2 = MB.MD

Ví dụ 3: Cho điểm C thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB. Từ điểm D thuộc đọan AO kẻ đường thẳng vuông góc với AO cắt AC và BC lần lượt lại E và F. Tiếp tuyến C với nửa đường tròn cắt EF tại M và cắt AB tại N.

a) Chứng minh M là trung điểm của EF.

b) Tìm vị trí của điểm C trên đường tròn (O) sao cho ΔACN cân tại C.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $MCA = \frac{1}{2}$sđAC (góc giữa tiếp tuyến và dây cung chắn cung AC) (1)

Ta lại có: $MEC = AED$ (hai góc đối đỉnh)

Xét tam giác AED vuông tại D, ta có:

$AED = 90° - EAD$

$EAD = \frac{1}{2} sđBC$ (góc EAD là góc nội tiếp chắn cung BC)

Mà $sđBC + sđAC = sđAB = 180°$(cung AB là cung chắn nửa đường tròn có số đo bằng $180°$)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}sđBC + \frac{1}{2}sđAC = \frac{1}{2}sđAB = 90°$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}sđBC = 90° - \frac{1}{2}sđAC$$

$$\Rightarrow MEC = AED = 90° - EAD = 90° - \frac{1}{2}sđBC = \frac{1}{2}sđAC\,(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MCA = MEC$ hay $MCE = MEC$

Vậy ΔMEC cân tại M, suy ra MC = ME.

Chứng minh tương tự ta có MC = MF.

Suy ra ME = MF hay M là trung điểm của EF.

b) ΔACN cân tại C khi và chỉ khi $CAN = CNA$

Vì MN là tiếp tuyến với (O) tại C nên OC ⊥ MN

$\Rightarrow CNA = 90° - COB = 90° - 2.CAN$

Mà $CAN = CNA \Rightarrow CAN = 90° - 2.CAN$

$3CAN = 90° \Leftrightarrow CAN = 30°$

$\Rightarrow sđBC = 2.CAN = 2.30° = 60°$

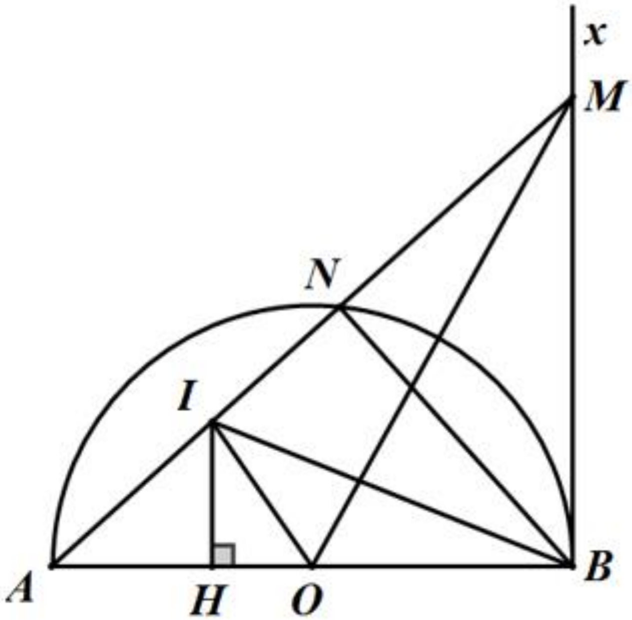
Vậy ΔACN cân tại C khi C là điểm nằm trên đường tròn sao cho $sđBC = 60°$.

Ví dụ 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Gọi M là một điểm thay đổi trên tiếp tuyến Bx của (O). Nối AM cắt (O) tại N. Gọi I là trung điểm của AN.

a) Chứng minh: ΔAIO ~ ΔBMN ; ΔOBM ~ ΔINB

b) Tìm vị trí của điểm M trên tia Bx để diện tích ΔAIO có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải



a) Vì I là trung điểm của AN $\Rightarrow$ OI $\perp$ AN (đường kính đi qua trung điểm của dây thì vuông góc với dây đó)

$\Rightarrow AIO = 90°$

Ta lại có: $ANB = 90°$(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AIO = ANB = 90°$

Do Bx là tiếp tuyến với (O) tại B nên $NBM = IAO = \frac{1}{2}$sđBN (góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BN).

Xét ΔAIO và ΔBMN, có:

$AIO = ANB = 90°$

$NBM = IAO$

$\Rightarrow$ ΔAIO ~ ΔBMN (g.g)

Gọi K là trung điểm của OM

Vì $OIM = OBM = 90°$

$\Rightarrow \Delta OIM$ vuông tại I $\Rightarrow IK = \dfrac{1}{2}OM = OK = MK$

Và ΔOBM vuông tại B $\Rightarrow BK = \dfrac{1}{2}OM = OK = MK$

$\Rightarrow IK = OK = MK = BK$

nên các điểm B, O, I, M cùng thuộc đường tròn đường kính MO,

suy ra $BOM = BIN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn BM)

Xét ΔOBM và ΔINB có:

$BOM = BIN$ (cmt)

$OIM = OBM = 90°$

Suy ra ΔOBM ~ ΔINB (g.g)

b) Kẻ IH ⊥ AO ta có: $S_{\Delta AIO}$ = 1/2 AO.IH

Vì AO không đổi nên $S_{\Delta AIO}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ IH lớn nhất.

Xét ΔAIO vuông tại I, gọi E là trung điểm của OA

Khi đó: $EI = \dfrac{1}{2}OA = EO = EA$

$\Rightarrow$ I thuộc đường tròn tâm E bán kinh $\dfrac{1}{2}OA$

Mà O, A cố định nên khi M chuyển động trên tia Bx thì I chạy trên nửa đường tròn đường kính AO

Do đó IH lớn nhất khi IH là bán kính của đường tròn tâm E, bán kính $\dfrac{1}{2}OA$.

Suy ra H trùng E hay H là trung điểm của OA

Xét ΔAIO vuông tại I: có IH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến

Nên ΔAIO vuông cân tại I

$\Rightarrow IAH = AIH = 45°$ (hai góc ở đáy).

Suy ra ΔABM vuông cân tại B nên BM = BA = 2R

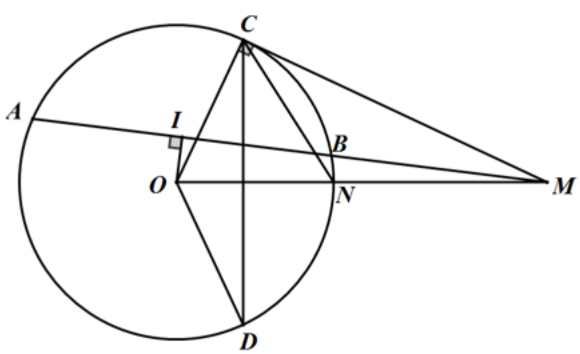
Vậy khi M thuộc Bx sao cho BM = 2R thì $S_{\Delta AIO}$ lớn nhất.

Ví dụ 5: Cho đường tròn (O; R) và dây AB, gọi I là trung điểm của dây AB. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M. Kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn, (C,D ≠ (O)) .

a) Chứng minh rằng: Năm điểm O, I, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi N là giao điểm của tia OM với (O). Chứng minh rằng N là tâm đường tròn nội tiếp của ΔCMD.

Hướng dẫn giải



a) Vì MC, MD là các tiếp tuyến tại C, D với đường tròn (O) nên

$OCM = ODM = 90°$ (1)

Mặt khác I là trung điểm của dây AB nên OI ⊥ AB hay $OIM = 90°$ (2)

Từ (1), (2) suy ra 5 điểm M, C, D, O, I cùng thuộc đường tròn đường kính OM.

b) Vì MC, MD là các tiếp tuyến của (O) nên MO là phân giác của CMD (3) và OM là phân giác của $COD \Rightarrow CON = DON \Rightarrow CN = ND$

Ta có: DCN là góc nội tiếp chắn ND

NCM là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn CN

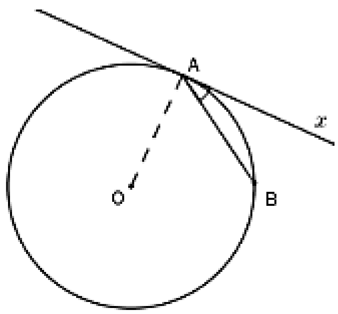
$\Rightarrow DCN = NCM$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn hai cung bằng nhau)

Suy ra CN là phân giác của DCM (4)

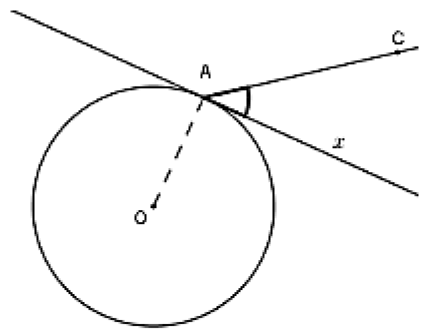
Từ (3) và (4) suy ra N là giao điểm các đường phân giác trong của ΔCMD hay N là tâm đường tròn nội tiếp ΔCMD.

C. Bài tập trắc nghiệm

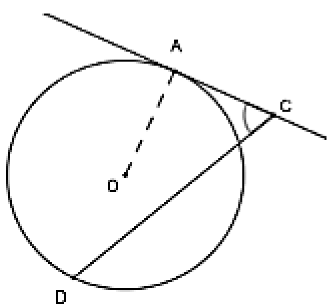
Câu 1: Góc ở hình nào dưới đây biểu diễn góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung



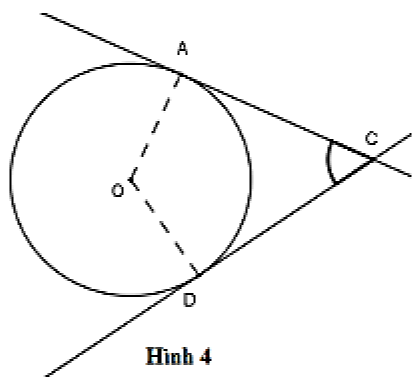
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 1

B. Hình 2

C. Hình 3

D. Hình 4

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Cho đường tròn tâm (O) có Ax là tia tiếp tuyến tại điểm A và dây cung AB. Khi đó góc BAx là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.

Câu 2: Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung có số đo bằng

A. 90°

B. Số đo góc ở tâm chắn cung đó

C. Nửa số đo góc nội tiếp chắn cung đó

D. Nửa số đo cung bị chắn

Hướng dẫn giải

Đáp án D

Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn.

Câu 3: Kết luận nào sau đây là đúng

A. Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung có số đo lớn hơn góc nội tiếp chắn cung đó

B. Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung có số đo nhỏ hơn góc nội tiếp chắn cung đó

C. Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau

D. Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung có số đo bằng hai lần số đo của góc nội tiếp chắn cung đó

Hướng dẫn giải

Đáp án C

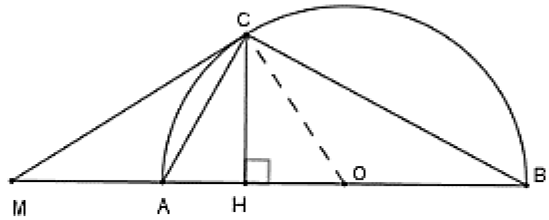
Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Câu 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối AB lấy điểm M. Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn . Gọi H là hình chiếu của C trên AB. CA là tia phân giác của góc nào dưới đây?

A. MCB B. MCH C. MCO D. CMB

Hướng dẫn giải

Đáp án B



Xét nửa đường tròn tâm O có $MCA = CBA$ (*) (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Lại có $ACB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra: $ACH = CBA$ (**) (cùng phụ với góc CAB)

Từ (*) và (**) ta có: $MCA = ACH$

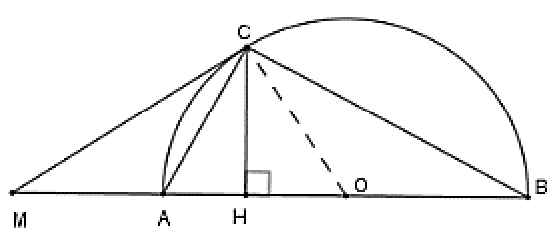
Nên CA là tia phân giác của góc MCH.

Câu 5: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối AB lấy điểm M. Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn . Gọi H là hình chiếu của C trên AB. Giả sử OA = a; MC = 2a . Độ dài CH.

A. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$ B. $\frac{2a}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$ D. $\frac{3\sqrt{5}a}{5}$

Hướng dẫn giải

Đáp án C



Ta có OA=OC=a

Xét tam giác vuông MCO vuông tại C (do MC là tiếp tuyến của đường tròn O)

$\Rightarrow MO^2 = MC^2 + OC^2 \Leftrightarrow MO = a\sqrt{5}$

Xét tam giác MCO, có:

$$S_{MCO} = \frac{1}{2}CH.MO = \frac{1}{2}MC.CO$$

$$\Rightarrow CH = \frac{MC.CO}{MO} = \frac{a.2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$$

Vậy $CH = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 6: Cho đường tròn tâm (O), điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua M dựng tiếp tuyến MA đến đường tròn (O), dựng cát tuyến MBC (B nằm giữa B và C). Đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $MA^2 = MB.MC$

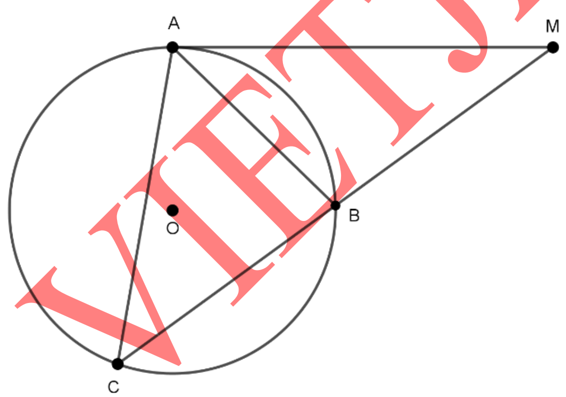
B. $MB^2 = MA.MC$

C. $MC^2 = MA.MB$

D. $\frac{1}{MA^2} = \frac{1}{MB^2} + \frac{1}{MC^2}$

Hướng dẫn giải

Đáp án A



Xét ΔMAB và ΔMCA, ta có:

M : Chung

$MAB = MCA$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AB)

$\Rightarrow \Delta MAB \sim \Delta MCA$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MB}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MB.MC$.

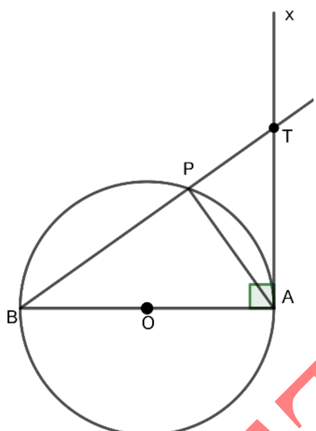
Câu 7: Cho đường tròn tâm O, đường kính AB, dựng tiếp tuyến Ax với đường tròn.

Lấy P là điểm bất kì trên đường tròn, BP cắt Ax tại T. Tìm khẳng định sai

A. $T = PAB$ B. $T = POB$ C. $T = OPA$ D. $PBA = TAP$

Hướng dẫn giải

Đáp án B



Ta có $PBA = TAP$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung PA). Suy ra D đúng.

Ta lại có: $APB = 90° \Rightarrow APT = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O)

$\Rightarrow T + PAT = 90°$ (hai góc phụ nhau)

Mà $PAT + PAB = 90°$ (hai góc phụ nhau)

$\Rightarrow T = PAB$. Suy ra A đúng.

Tam giác OPA có OP=OA nên tam giác OPA cân tại O nên $OPA = OAP$

$\Rightarrow T = OPA$. Nên C đúng

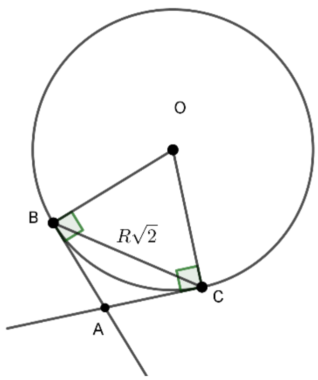
Vậy B sai.

Câu 8: Cho đường tròn (O) và dây BC = $\sqrt{2}$ R. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại A. Tính góc ABC

A. 45° B. 30° C. 60° D. 75°

Hướng dẫn giải

Đáp án A



Ta có $BC^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$

Và $OC^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$

$\Rightarrow OC^2 + OB^2 = BC^2$

Nên tam giác OBC vuông cân tại O

$\Rightarrow OBC = OCB = 45°$

Mà $ABC + OBC = 90° \Rightarrow ABC = 45°$

Câu 9: Cho đường tròn (O; R) có dây BC không phải đường kính. Dựng hai tiếp tuyến tại B và C chúng cắt nhau tại A. Biết rằng ABC = 30° . Tính BC theo R?

A. BC = $\sqrt{3}$ R B. BC = $\sqrt{2}$ R C. BC = R D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải

Đáp án C

Ta lại có: $\widehat{ABC}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn BC

$\widehat{BOC}$ là góc ở tâm chắn BC

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 2\widehat{ABC} = 2.30° = 60°$

Xét tam giác OBC, có OB=OC nên suy ra tam giác OBC cân tại O

Mà $\widehat{BOC} = 60°$

$\Rightarrow \Delta OBC$ đều

$\Rightarrow$ OB=BC=OC=R.