

Dạng 2: Liên hệ giữa cung và dây

A. Phương pháp giải

Ta thường sử dụng các kiến thức:

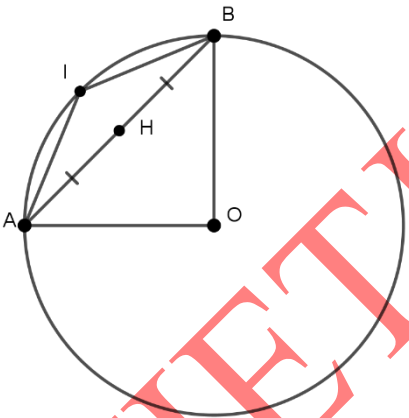
Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- +) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
- +) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.
- +) Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.
- +) Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

B. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O). Gọi I là điểm chính giữa cung AB (Không phải là cung nửa đường tròn) và H là trung điểm của dây AB. Chứng minh rằng đường thẳng IH đi qua tâm O của đường tròn.

Hướng dẫn giải



Ta có: $IA = IB$ (do I là điểm chính giữa cung AB)

$\Rightarrow IA = IB$ (2 cung bằng nhau căng 2 dây bằng nhau)

$\Rightarrow I$ nằm trên đường trung trực của AB

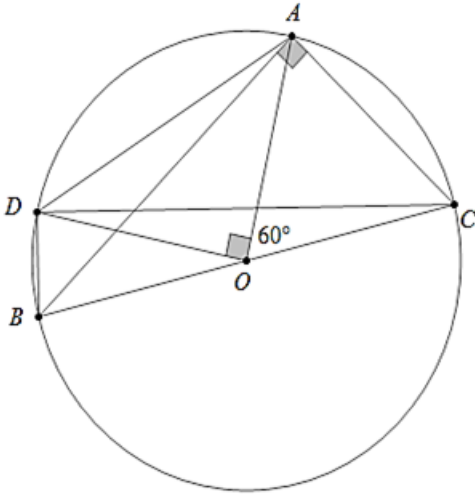
Ta có: $OA = OB$ (bán kính (O))

$\Rightarrow O$ nằm trên đường trung trực của AB

Suy ra: OI là đường trung trực của AB

H là trung điểm của AB, do đó OI đi qua trung điểm H
 Vậy 3 điểm I, H, O thẳng hàng.

Ví dụ 2: Dựa vào hình vẽ sau, hãy so sánh AB và CD:



Hướng dẫn giải

Ta có: $\widehat{DOC} = \widehat{DOA} + \widehat{AOC} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$

$\widehat{AOB} = 180^\circ - \widehat{AOC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Do đó, $\widehat{DOC} > \widehat{AOB}$

Mà \widehat{DOC} là góc ở tâm chắn $DC \Rightarrow sđDC = \widehat{DOC}$

Và \widehat{AOB} là góc ở tâm chắn $AB \Rightarrow sđAB = \widehat{AOB}$

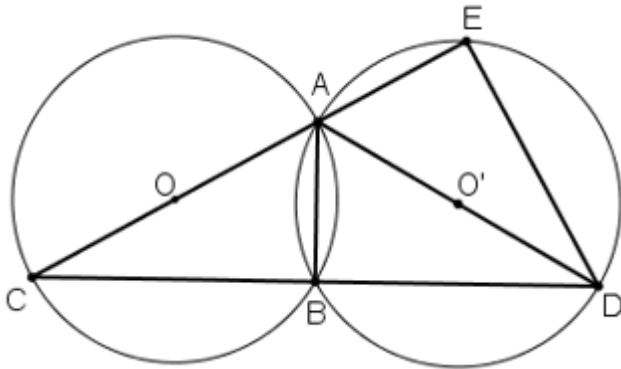
$\Rightarrow sđDC > sđAB \Rightarrow DC > AB$ (cung lớn hơn căng dây lớn hơn).

Ví dụ 3: Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Kẻ các đường kính AOC, AO'D. Gọi E là giao điểm thứ hai của AC với đường tròn (O').

a) So sánh các cung nhỏ BC, BD.

b) Chứng minh rằng B là điểm chính giữa của cung EBD (tức là điểm B chia cung EBD thành hai cung bằng nhau: $BE = BD$)

Hướng dẫn giải



a) Vì $A, B, C \in (O)$

$$\Rightarrow BO = OA = OC$$

$$\Rightarrow BO = AC/2.$$

Tam giác ABC có đường trung tuyến BO và BO bằng một nửa cạnh AC

\Rightarrow Tam giác ABC là tam giác vuông tại B (định lý)

$$\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$$

Chứng minh tương tự

$$\Rightarrow \angle ABD = 90^\circ$$

Đường tròn tâm O và O' bằng nhau $\Rightarrow AC = AD$ (AC, AD lần lượt là đường kính của (O) và (O')).

Xét hai tam giác vuông $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$ có:

AB chung,

$$AC = AD$$

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ABD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow BC = BD$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow BC = BD$ (liên hệ giữa cung và dây)

b) Xét tam giác AED có đường trung tuyến EO' bằng một phần hai cạnh tương ứng là AD ($O'E = O'A = O'D = AD/2$)

\Rightarrow Tam giác AED vuông tại E

$$\Rightarrow \angle AED = 90^\circ \text{ hay } \angle CED = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle ECD$ vuông tại E.

Ta có: $\angle ABC = \angle ABD = 90^\circ$ (cma)

$$\Rightarrow \angle ABC + \angle ABD = 180^\circ$$

Suy ra: C, B, D thẳng hàng.

Tam giác ECD vuông tại E,

có B là trung điểm CD

\Rightarrow EB là đường trung tuyến

$$\Rightarrow EB = BD (=CD/2).$$

$\Rightarrow BE = BD$ (Liên hệ giữa cung và dây) hay B là điểm chính giữa cung EBD .

C. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho đường tròn (O) có hai dây AB, CD song song với nhau. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $AD > BC$

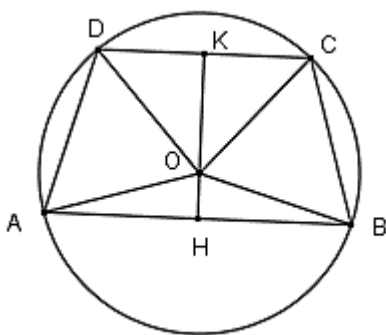
B. Số đo cung AD bằng số đo cung BC

C. $AD < BC$

D. $\angle AOD > \angle COD$

Hướng dẫn giải

Đáp án B



Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với AB và CD, cắt AB, CD lần lượt tại H và K.

Xét tam giác ODC, có:

$OD=OC$ (là bán kính (O)) nên tam giác ODC cân tại O

Mà $OK \perp DC \Rightarrow OK$ là phân giác của $DOC \Rightarrow DOK = COK$

Xét tam giác OAB, có:

$OA=OB$ (là bán kính (O)) nên tam giác OAB cân tại O

Mà $OH \perp AB \Rightarrow OH$ là phân giác của $AOB \Rightarrow AOH = BOH$

$\Rightarrow COK + BOH = DOK + AOH$

Ta lại có: $AOD = 180^\circ - DOK - AOH; BOC = 180^\circ - COK - BOH$

$\Rightarrow AOD = BOC \Rightarrow sđAD = sđBC \Rightarrow AD = BC.$

Phương án A, C, D sai, B đúng.

Câu 2: Chọn khẳng định đúng. Cho đường tròn (O) có dây cung $AB > CD$ khi đó

- A. Cung AB lớn hơn cung CD
- B. Cung AB nhỏ hơn cung CD
- C. Cung AB bằng cung CD
- D. Số đo cung AB bằng hai lần số đo cung BC

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau

+ Cung lớn hơn căng dây lớn hơn

+ Dây lớn hơn căng cung lớn hơn

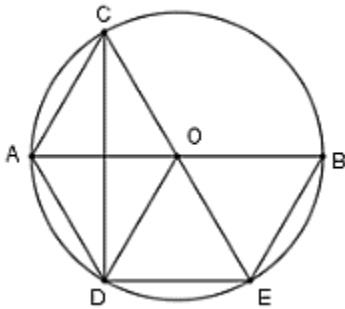
Nên dây $AB > CD$ thì cung AB lớn hơn cung CD

Câu 3: Cho đường tròn (O) đường kính AB và một cung AC có số đo nhỏ hơn 90° . Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB. Chọn kết luận sai?

- A. $AC = BE$
 B. Số đo cung AD bằng số đo cung BE
 C. Số đo cung AC bằng số đo cung BE
 D. $\angle AOC < \angle AOD$

Hướng dẫn giải

Đáp án D



Ta có $CD \perp AB$

Mà $DE \parallel AB$

$\Rightarrow DE \perp CD \Rightarrow \angle CDE = 90^\circ \Rightarrow CE$ là đường kính hay C, O, E thẳng hàng.

$\Rightarrow \angle AOC = \angle BOE$ (hai góc đối đỉnh) (1)

Xét tam giác ODC cân tại O , có $OA \perp CD$, nên :

OA là phân giác của $\angle COD \Rightarrow \angle COA = \angle AOD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\angle AOC = \angle BOE = \angle AOD$

Ta có $\angle AOC$ là góc ở tâm chắn AC , $\angle BOE$ là góc ở tâm chắn BE , $\angle AOD$ là góc ở tâm chắn AD

$\Rightarrow AC = BE = AD$ (liên hệ giữa góc ở tâm và số đo cung)

$\Rightarrow AC = BE = AD$ (liên hệ giữa cung và dây).

Vậy đáp án D sai.

Câu 4: Chọn khẳng định đúng.

- A. Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây (không đi qua tâm) thì đi qua điểm chính giữa của cung bị căng bởi dây ấy.
- B. Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây thì đi qua điểm chính giữa của cung bị căng bởi dây ấy.
- C. Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì song song với dây căng cung ấy.
- D. Trong một đường tròn, hai đường kính luôn vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

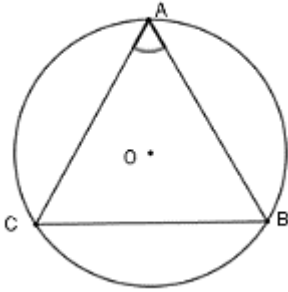
- + Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây (không qua tâm) thì đi qua điểm chính giữa của cung bị căng bởi dây ấy.
- + Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.
- + Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông với dây căng cung ấy và ngược lại
- + Trong một đường tròn hai đường kính không nhất thiết phải vuông góc với nhau.

Câu 5: Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 66^\circ$ nội tiếp đường tròn (O) . Trong các cung nhỏ AB, BC, CA thì cung nào là cung lớn nhất?

- A. Cung AB
- B. Cung AC
- C. Cung BC
- D. Cung AB và cung AC

Hướng dẫn giải

Đáp án C



Vì tam giác ABC cân tại A có $A = 66^\circ$

$$\Rightarrow B = C = \frac{180^\circ - A}{2} = \frac{180^\circ - 66^\circ}{2} = 57^\circ \Rightarrow A > B = C$$

Theo mối liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác ta có:

$$BC > AB = AC$$

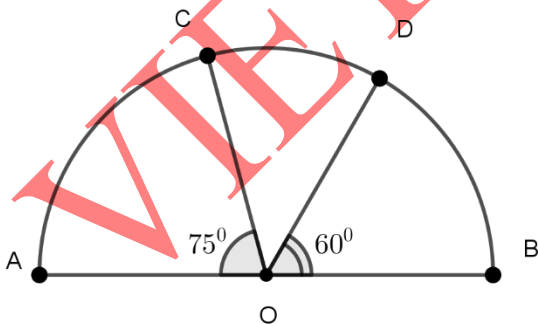
Theo mối liên hệ giữa cung và dây: $BC > AB = AC$.

Vậy BC là cung lớn nhất.

Câu 6: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy các điểm C và D trên nửa đường tròn sao cho: $AOC = 75^\circ$, $BOD = 60^\circ$. Tìm khẳng định sai?

- A. $CD < CA$ B. $BD < CA$ C. $CD < BD$ D. $CD > BD$

Hướng dẫn giải



Đáp án D

$$\text{Ta có: } AOC + COD + BOD = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle COD = 180^\circ - \angle AOC - \angle BOD = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle COD < \angle BOD < \angle COA$$

Ta lại có: $\angle AOC$ là góc ở tâm chắn cung AC

$\angle COD$ là góc ở tâm chắn cung CD

$\angle BOD$ là góc ở tâm chắn cung BD

$$\Rightarrow \angle CD < \angle BD < \angle CA \Rightarrow CD < BD < CA.$$

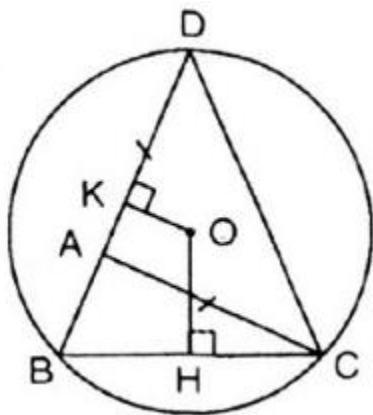
Vậy A, B, C đúng; D sai.

Câu 7: Cho tam giác ABC . Trên tia đối của tia AB lấy một điểm D sao cho $AD = AC$. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác DBC . Từ O lần lượt hạ các đường vuông góc OH, OK với BC và BD ($H \in BC, K \in BD$). So sánh OH và OK .

- A. $OH = OK$ B. $OH > OK$ C. $OH < OK$ D. $OH = 2OK$

Hướng dẫn giải

Đáp án B



Xét $\triangle ABC$ có: $BC < AB + AC$ (Bất đẳng thức tam giác)

Mà $AD = AC$ (gt)

$$\Rightarrow BC < AB + AD = BD$$

Mà OH là khoảng cách từ O đến dây BC , OK là khoảng cách từ O đến dây BD

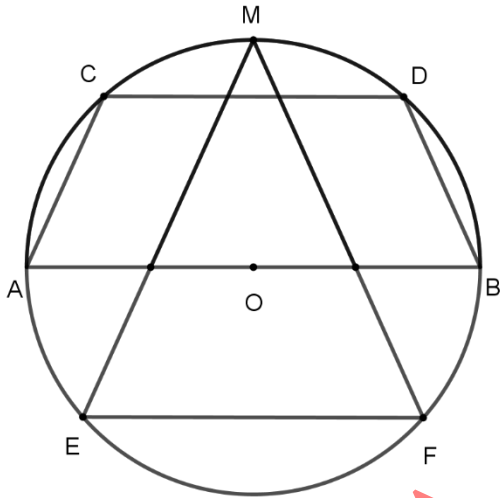
$$\Rightarrow OH > OK. (\text{định lý về khoảng cách từ tâm đến dây}).$$

Câu 8: Cho đường tròn tâm O, đường kính AB, dây CD song song với AB (C thuộc cung AD). Qua M là điểm chính giữa cung CD vẽ các dây ME, MF sao cho $ME \parallel AC$, $MF \parallel BD$. $\triangle MEF$ là tam giác gì?

A. Tam giác cân B. Tam giác vuông C. Tam giác đều D. Tam giác vuông cân.

Hướng dẫn giải

Đáp án A



Ta có M là điểm chính giữa cung CD $\Rightarrow CM = DM$ (1)

Vì $AC \parallel ME \Rightarrow CM = AE$ (2)

$MF \parallel DB \Rightarrow BF = DM$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $AE = BF = CM = DM$

Mặt khác, $CD \parallel AB \Rightarrow AC = DB$

Ta có $ME = MC + AC + AE$; $MF = MD + DB + BF$

$\Rightarrow ME = MF \Rightarrow ME = MF$ (liên hệ giữa cung và dây)

Suy ra tam giác MEF cân tại M.

Câu 9: Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O, có $B = 40^\circ$, $A = 100^\circ$. Cho các phát biểu sau:

(I) $AB = AC$ (II) $BC > AC > AB$ (III) $BC > AC = AB$

Các phát biểu đúng là:

A. Cả ba phát biểu trên
và (III)

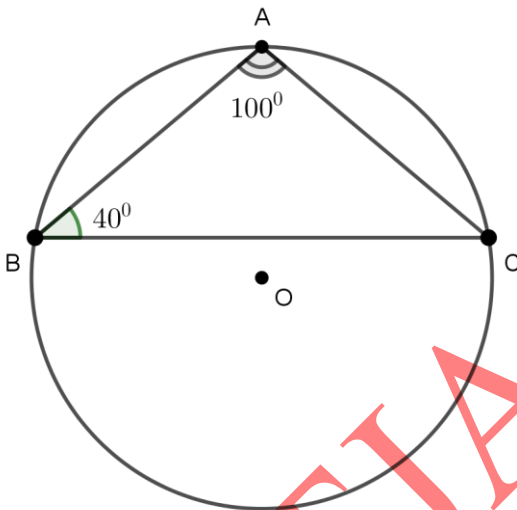
B. (I) và (II)

C. (I) và (III)

D. (II)

Hướng dẫn giải

Đáp án C

Xét $\triangle ABC$, ta có:

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (40^\circ + 100^\circ) = 40^\circ$$

$$\Rightarrow B = C$$

$$\Rightarrow BC > AB = AC \text{ (Theo mối liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác)}$$

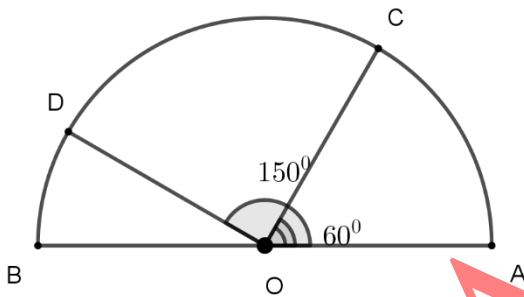
$$\Rightarrow BC > AB = AC \text{ (Theo mối liên hệ giữa cung và dây).}$$

Câu 10: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, điểm C và D nằm trên nửa đường tròn sao cho $\angle AOC = 60^\circ$; $\angle DOA = 150^\circ$ và tia OC nằm giữa hai tia OA và OD. Tìm khẳng định đúng

- A. $AC < CD < DA$
- B. $AOC > COD$
- C. $CD > DA$
- D. Tất cả đều sai

Hướng dẫn giải

Đáp án A



Vì OC nằm giữa hai tia OA và OD nên:

$$AOD = AOC + COD \Rightarrow COD = AOD - AOC = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$$

Ta có: $AOC < COD < DOA \Rightarrow AC < CD < DA \Rightarrow AC < CD < DA$

Vậy A đúng, B, C, D sai.