Chủ đề: Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

Dạng 2: Tính số đo góc nội tiếp

A. Phương pháp giải

Ta áp dụng các kiến thức sau để tính số đo góc nội tiếp:

1. Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng một nửa số đo của cung bị chắn.

2. Trong một đường tròn:

a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

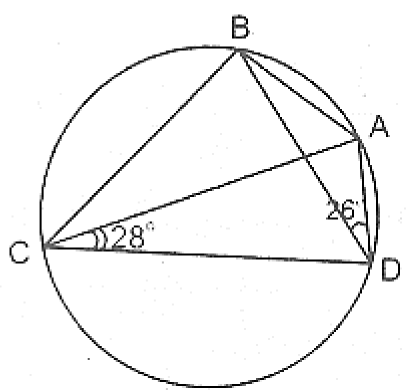
b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

c) Góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

B. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho hình vẽ có CA = CD. Hãy tính số đo BAC.



Hướng dẫn giải

Xét tam giác ACD có CA = CD nên ΔACD cân tại C

$$\Rightarrow CAD = CDA = \frac{180° - ACD}{2} = \frac{180° - 28°}{2} = 76°$$

Mà $CDB + BDA = ADC$

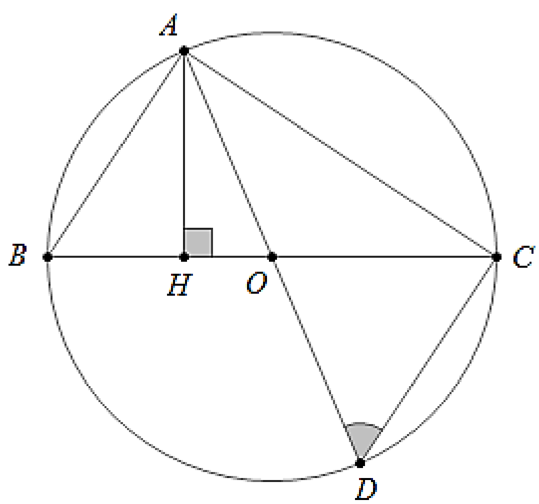
$\Leftrightarrow CDB + 26° = 76°$

$\Leftrightarrow CDB = 76° - 26° = 50°$

Ta lại có: $BAC = CDB = 50°$ (hai góc nội tiếp cùng chắn BC).

Vậy $BAC = 50°$.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O; R) đường kính BC cố định. Điểm A di động trên đường tròn khác B và C. Vẽ đường kính AOD. Xác định vị trí điểm A để diện tích ΔABC đạt giá trị lớn nhất, khi đó $ADC = ?$



Hướng dẫn giải

Kẻ đường cao AH của tam giác ABC

Diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.BC.AH$

Vì BC là đường kính nên BC cố định

Suy ra diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất khi AH lớn nhất

Xét tam giác AHO vuông tại H, Ta có $AH \le AO$ (AO là cạnh huyền)

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.BC.AH \le \frac{1}{2}.BC.AO = \frac{1}{2}.2R.R = R^2$

Dấu "=" xảy ra khi H≡O.

Khi đó A là điểm chính giữa cung BC hay AD⊥BC.

Xét tam giác ACD, có:

$ACD = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

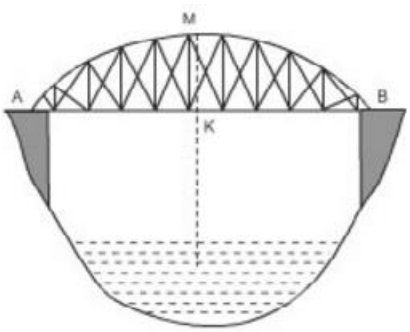
Ta có CO vừa là đường trung tuyến, vừa là đường cao

Suy ra Δ ACD vuông cân tại C

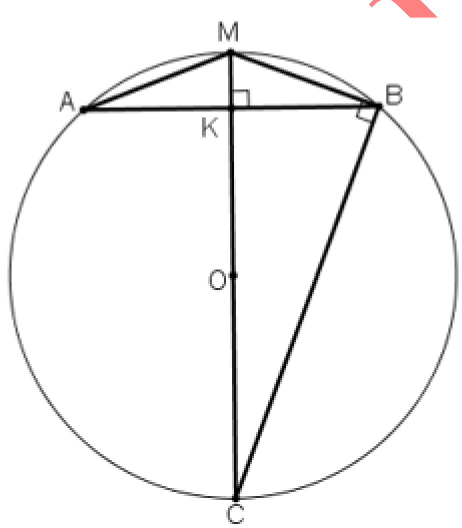
$\Rightarrow CAD = CDA = 45°$.

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất khi A nằm chính giữa cung BC và $CDA = 45°$.

Ví dụ 3: Một chiếc cầu được thiết kế như hình 21 có độ dài AB = 40m, chiều cao MK = 3m. Hãy tính bán kính của đường tròn chứa cung AMB.



Hướng dẫn giải



Gọi (O; R) là đường tròn chứa cung AMB.

Kẻ đường kính MC.

K là trung điểm AB ⇒ BK = $\frac{AB}{2}$ = 20 (m).

MBC là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

⇒ MBC = 90°

⇒ ΔMBC vuông tại B, có BK là đường cao

⇒ BK^2 = MK.KC (hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông)

$$\Rightarrow KC = \frac{BK^2}{MK} = \frac{20^2}{3} = \frac{400}{3}(m)$$

$$\Rightarrow MC = MK + KC = 3 + \frac{400}{3} = \frac{409}{3}(m)$$

$$\Rightarrow R = \frac{MC}{2} = \frac{409}{6}(m).$$

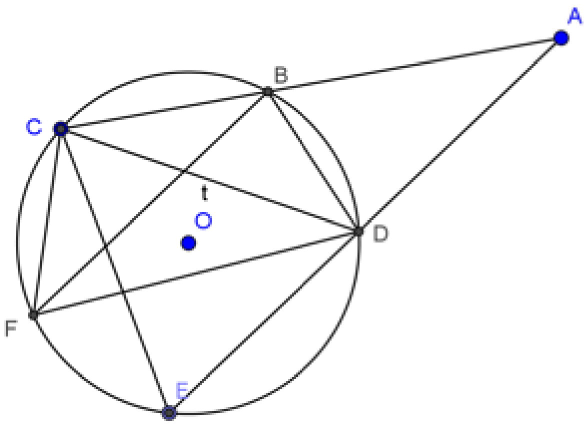
Vậy $R = \frac{409}{6}(m)$.

Ví dụ 4: Qua điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai cát tuyến ABC và ADE với đường tròn đó (B nằm giữa A và C, D nằm giữa A và E). Kẻ dây BF // DE. Chứng minh rằng:

a) $DBF = BCE$

b) ΔACE ~ ΔDCF

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $DBF = \frac{1}{2}\text{sđ}DF = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}DE + \text{sđ}EF\right)$

và $BCE = \frac{1}{2}\text{sđ}BE = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}BD + \text{sđ}DE\right)$

Mặt khác DE // BF

$\Rightarrow EDF = BFD$ (hai góc so le trong)

Mà EDF là góc nội tiếp chắn cung EF

BFD là góc nội tiếp chắn cung DB

$\Rightarrow BD = EF$

Ta lại có: $BE = BD + DE;\ DF = FE + DE$

Từ đó suy ra $DBF = BCE$.

b) Vì BF // DE nên $CBF = CAE$ (hai góc đồng vị)

Mà $CBF = CDF$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CF) $\Rightarrow CAE = CDF$

Lại có $CED = CFD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD)

Xét ΔACE và ΔDCF, ta có:

$CAE = CDF$ (cmt)

$CED = CFD$ (cmt)

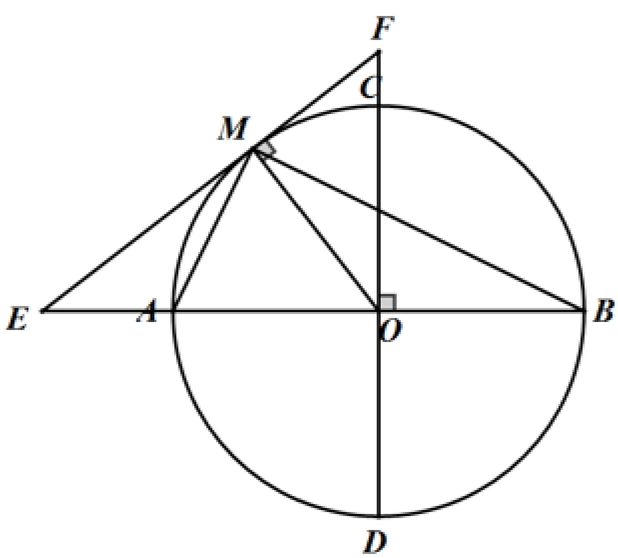
Suy ra ΔACE ~ ΔDCF (g.g)

Ví dụ 5: Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc với nhau của đường tròn (O; R). Qua điểm M thuộc cung nhỏ AC (M ≠ A, M ≠ E) kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt AB, CD lần lượt tại E, F.

a) Chứng minh: $MFO = 2MBO$

b) Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ AC sao cho $FEO = 30°$. Khi đó tính độ dài đoạn thẳng OE, ME, EF theo R.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: MOA là góc ở tâm chắn cung MA

MBA là góc nội tiếp chắn cung MA

$\Rightarrow MOA = 2MBA$

Vì EF là tiếp tuyến với (O) tại M nên OM ⊥ EF

Ta có $MOA = EFO$ (cùng phụ với FEO)

$\Rightarrow EFO = 2MBA$ hay $MFO = 2MBO$

b)

Xét ΔAOM có: OA = OM

$\Rightarrow \Delta AOM$ cân tại O

Ta có: $FEO = 30 \Rightarrow MOA = 60°$

$\Rightarrow$ΔAOM đều nên AM = OA = R.

Vậy nếu M ∈ (O) và AM = R thì $FEO = 30°$

Xét ΔOME vuông tại M, ta có:

$\tan MOA = \dfrac{ME}{MO} \Leftrightarrow$ ME=tan$MOA.MO = \sqrt{3}R$.

Ta có EMA là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung AM

MOA là góc ở tâm chắn cung AM

$\Rightarrow EMA = \dfrac{1}{2}MOA = 30° = MEA$

$\Rightarrow \Delta MEA$ cân tại A

$\Rightarrow$ AE = AM

Mà AE = OA = OM, OE = OA+EA

$\Rightarrow$OE = 2MO = 2R

Vì ΔEOF vuông tại O, ta có:

$cos FEO = \dfrac{EO}{EF} \Rightarrow EF = \dfrac{EO}{cos FEO} = \dfrac{2R}{\cos 30°} = \dfrac{4R\sqrt{3}}{3}$.

C. Bài tập trắc nghiệm

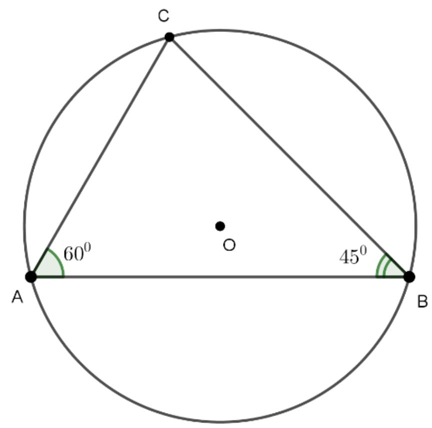
Câu 1: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O), biết $ABC = 45°; BAC = 60°$.

Tính số đo của cung AB.

A. 150° B. 90° C. 120°
D. 210°

Hướng dẫn giải

Đáp án A



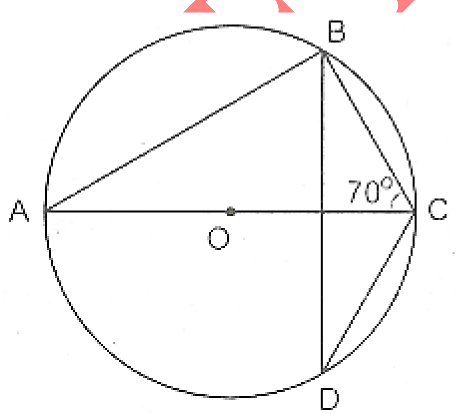
Xét ΔABC, ta có:

$$\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=180^\circ$$
$$\Rightarrow \widehat{ACB}=180^\circ-\left(\widehat{BAC}+\widehat{ABC}\right)$$
$$\Leftrightarrow \widehat{ACB}=180^\circ-\left(60^\circ+45^\circ\right)=75^\circ$$

Vì $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$ nên:

$$\widehat{ACB}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}\Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{AB}=2.\widehat{ACB}=2.75^\circ=150^\circ$$

Câu 2: Hãy tính số đo góc BDC trong hình.



A. 20° B. 30° C. 60° D. 70°

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Ta có ACB là góc nội tiếp chắn AB

Và ADB là góc nội tiếp chắn AB

$\Rightarrow ACB = ADB = 70°$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AB)

Ta lại có: ADC là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow ADC = 90°$.

Mà $ADC = ADB + BDC$

$\Leftrightarrow 90° = 70° + BDC$

$\Leftrightarrow BDC = 90° - 70° = 20°$

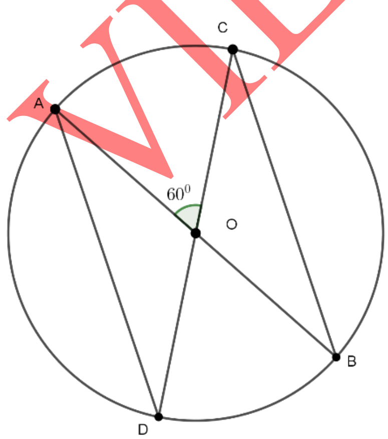
Vậy $BDC = 20°$.

Câu 3: Cho đường tròn tâm O và 2 đường kính AB và CD. Biết rằng $AOC = 60°$. Tìm khẳng định sai ?

A. $COB = 120°$ B. $ABC = 60°$ C. $ADC = 30°$ D. $CAB = CDB = 60°$

Hướng dẫn giải

Đáp án B



+ Ta có $AOC + BOC = 180°$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow BOC = 180° - AOC$

$\Rightarrow BOC = 180° - 60° = 120°$

Suy ra A đúng.

+ ABC và ADC là các góc nội tiếp chắn cung AC

AOC là góc ở tâm chắn cung AC

$\Rightarrow ABC = ADC = \frac{1}{2}.AOC = \frac{1}{2}.60° = 30°$

Suy ra B sai, C đúng.

+ CAB và BDC là các góc nội tiếp chắn cung BC

BOC là góc ở tâm chắn cung BC

$\Rightarrow CAB = BDC = \frac{1}{2}.BOC = \frac{1}{2}.120° = 60°$.

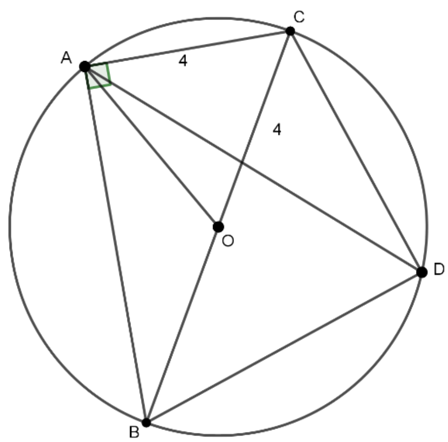
Suy ra D đúng.

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O; 4) .Biết rằng AC = 4cm . Lấy D là điểm bất kì khác A, B,C trên đường tròn. Chọn khẳng định đúng.

A. $BDA = 90°$ B. $BCA = 30°$ C. $ADC = 30°$ D. $ABC = 60°$

Hướng dẫn giải

Đáp án C



Xét ΔAOC, có: OA=OC=AC= 4cm

Suy ra ΔAOC đều

$\Rightarrow ACB = 60°$. Suy ra B sai.

Ta có: $BDA = ACB = 60°$(hai góc nội tiếp cùng chắn AB). Suy ra A sai.

Xét ΔABC vuông tại A, ta có :

$ACB + ABC = 90°$(hai góc nhọn phụ nhau)

$\Rightarrow ABC = 90° - ACB = 90° - 60° = 30°$. Suy ra D sai.

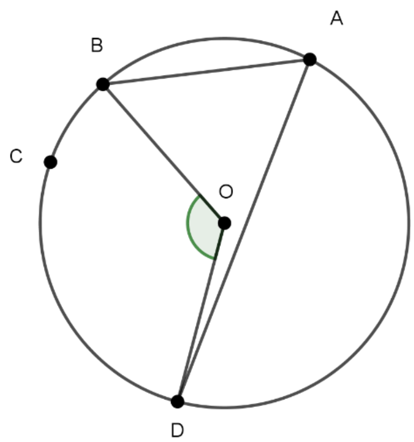
Ta lại có: $ADC = ABC = 30°$(hai góc nội tiếp cùng chắn AC). Suy ra C đúng.

Câu 5: Cho bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn tâm O. Biết góc $BOD = 124°$. Khi đó số đo góc BAD là :

A. $BAD = 124°$ B. $BAD = 56°$ C. $BAD = 62°$ D. $BAD = 118°$

Hướng dẫn giải

Đáp án C



Ta có : BOD là góc ở tâm chắn BD.

BAD là góc nội tiếp chắn BD.

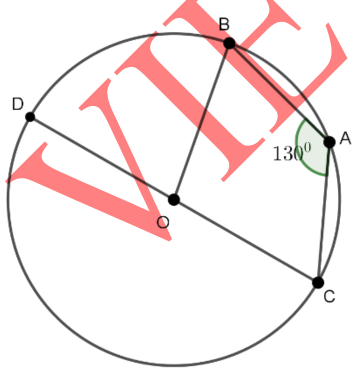
Khi đó $BAD = \frac{1}{2}.BOD = \frac{1}{2}.124° = 62°$.

Câu 6: Cho đường tròn (O) và góc nội tiếp $BAC = 130°$. Gọi D là giao điểm của OC và đường tròn (O). Tính số đo góc cung BD.

A. sđ$BD = 80°$ B. sđ$BD = 100°$ C. sđ$BD = 130°$ D. sđ$BD = 65°$

Hướng dẫn giải

Đáp án A



Ta có $BAC = 130°$ là góc nội tiếp chắn BDC

$\Rightarrow sđBDC = 2BAC = 2.130° = 260°$

Khi đó số đo cung BC nhỏ là : $sđBAC = 360° - sđBDC = 360° - 260° = 100°$

Ta lại có : CDB là góc nội tiếp chắn cung BAC

$\Rightarrow CDB = \frac{1}{2} sđBAC = \frac{1}{2}.100° = 50°$

Xét ΔOBD có : OD = OB

$\Rightarrow \Delta OBD$ cân tại O

$\Rightarrow ODB = OBD = 50°$

$\Rightarrow DOB = 180° - ODB - OBD = 180° - 50° - 50° = 80°$

$\Rightarrow$ sđ$BD = DOB = 80°$ (góc DOB là góc ở tâm chắn cung BD)

Vậy sđ$BD = 80°$.