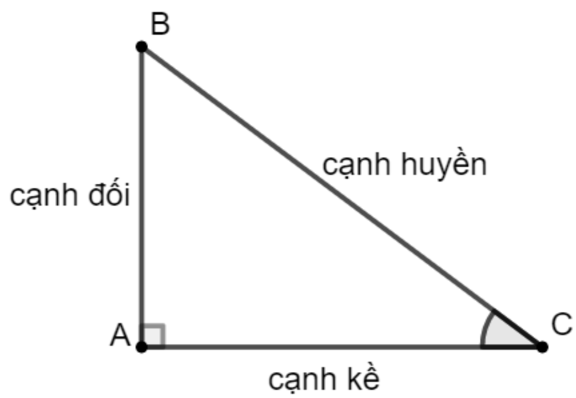
Dạng 3: Chứng minh hệ thức lượng giác

Nhắc lại kiến thức

1. Cho góc nhọn α, từ một điểm bất kì trên một cạnh của góc α, kẻ đường vuông góc với cạnh kia.



Khi đó:

- $\sin\alpha = \dfrac{\text{canh doi}}{\text{canh huyen}} = \dfrac{AB}{BC}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\text{canh ke}}{\text{canh huyen}} = \dfrac{AC}{BC}$
- $\tan\alpha = \dfrac{\text{canh doi}}{\text{canh ke}} = \dfrac{AB}{AC}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\text{canh ke}}{\text{canh doi}} = \dfrac{AC}{AB}$

2. Nếu hai góc phụ nhau (có tổng số đo bằng $90°$) thì: sin góc này bằng cos góc kia, tan góc này bằng cot góc kia

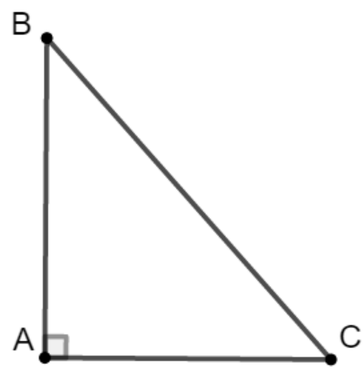
A. Phương pháp giải

- Tính tỉ số lượng giác theo định nghĩa.
- Nhân hay chia theo vế các tỉ số lượng giác.
- Áp dụng hệ thức Py-ta-go.

B. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$.

Bài giải:



Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có:

$$\begin{cases} \sin B = \dfrac{AC}{BC} \\ \sin C = \dfrac{AB}{BC} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{AC}{BC} : \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AC}{AB}$$

Vậy $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại A có $B = \alpha$ (với $0° < \alpha < 90°$). Chứng minh các hệ thức lượng giác sau:

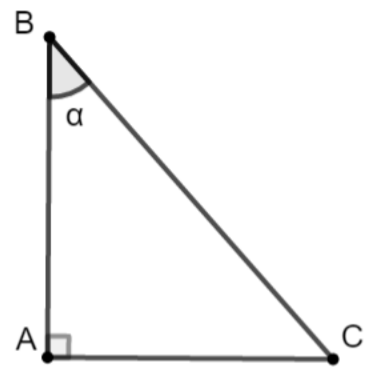
a) $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$.

b) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

c) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

d) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Bài giải:



Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có:

+) $\sin\alpha = \dfrac{AC}{BC}$

+) $\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC}$

+) $\tan\alpha = \dfrac{AC}{AB}$

+) $\cot\alpha = \dfrac{AB}{AC}$

a) $\tan\alpha.\cot\alpha = 1.$

Ta có:

$$\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{AC}{AB} \\ \cot\alpha = \dfrac{AB}{AC} \end{cases}$$

$\Rightarrow \tan\alpha.\cot\alpha = \dfrac{AC}{AB}.\dfrac{AB}{AC}$

$\Leftrightarrow \tan\alpha.\cot\alpha = 1.$

b) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

Ta có:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2}$$

Mặt khác lại có: $AC^2 + AB^2 = BC^2$

(Định lý Py – ta – go cho tam giác ABC vuông)

$\Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{BC^2}{BC^2} = 1$ (đpcm)

Vậy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

c) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}.$

Ta có:

+) $1 + \tan^2\alpha = 1 + \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2$

$= 1 + \dfrac{AC^2}{AB^2} = \dfrac{AB^2 + AC^2}{AB^2}$

$= \dfrac{BC^2}{AB^2}$ (do $AC^2 + AB^2 = BC^2$ - cmt)

+) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{AB}{BC}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{AB^2}{BC^2}} = \dfrac{BC^2}{AB^2}$

$\Rightarrow 1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{BC^2}{AB^2}.$

d) $1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Ta có:

+) $1+\cot^2\alpha = 1+\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$

$= 1+\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{AC^2+AB^2}{AC^2} = \dfrac{BC^2}{AC^2}$

(do $AC^2+AB^2=BC^2$ - cmt)

+) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{AC^2}{BC^2}} = \dfrac{BC^2}{AC^2}$

$\Rightarrow 1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \dfrac{BC^2}{AC^2}$

Ví dụ 3: Cho α là một góc nhọn bất kì.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$

b) Hãy tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ với $\tan\alpha = \dfrac{3}{5}$

Bài giải:

a) Ta có:

$$\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}:\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$$

Vậy $\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

b) Ta có: $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$ (cmt)

$$M=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{-(\cos\alpha-\sin\alpha)}$$

$$\Rightarrow M=-\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=-\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow M=-\frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}=-\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}=-\frac{8}{2}=-4$$

Vậy $M=-4$.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào số đo của góc nhọn α:

a) $A=\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha.\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$

b) $B=\sin^4\alpha+\cos^2\alpha.\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

c) $C=\frac{1}{1+\sin\alpha}+\frac{1}{1-\sin\alpha}-2\tan^2\alpha$

Bài giải:

a) $A = \cos^4\alpha + 2\cos^2\alpha.\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$

$= \left(\cos^2\alpha\right)^2 + 2\cos^2\alpha.\sin^2\alpha + \left(\sin^2\alpha\right)^2$

$= \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)^2$ (do $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$)

$= 1^2 = 1$

b) $B = \sin^4\alpha + \cos^2\alpha.\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

$= \left(\sin^4\alpha + \cos^2\alpha.\sin^2\alpha\right) + \cos^2\alpha$

$= \sin^2\alpha.\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + \cos^2\alpha$ (do $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$)

$= \sin^2\alpha.1 + \cos^2\alpha = 1$

c) $C = \dfrac{1}{1+\sin\alpha} + \dfrac{1}{1-\sin\alpha} - 2\tan^2\alpha$

$= \dfrac{1-\sin\alpha + 1 + \sin\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)} - 2\tan^2\alpha$

$= \dfrac{2}{1-\sin^2\alpha} - 2\tan^2\alpha$

$= \dfrac{2}{\cos^2\alpha} - 2.\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right)$

(do $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$)

$= \dfrac{2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{2}{\cos^2\alpha} + 2 = 2$

Ví dụ 5: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

b) $\sin^4 x + \sin^2 x.\cos^2 x + \sin^2 x = 2\sin^2 x$

c) $(1+\tan x)(1+\cot x) - 2 = \dfrac{1}{\sin x.\cos x}$

Bài giải:

a) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = \sin^2 x - \cos^2 x$

$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right).1 - \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) = 0$ (do $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

$\Leftrightarrow 0 = 0$ luôn đúng

b) $\sin^4 x + \sin^2 x.\cos^2 x + \sin^2 x = 2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x.\left(\sin^2 x + \cos^2 x + 1\right) = 2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x.\left(1+1\right) = 2\sin^2 x$ (do $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x = 2\sin^2 x$ (luôn đúng)

c) $\left(1+\tan x\right)\left(1+\cot x\right) - 2 = \dfrac{1}{\sin x.\cos x}$

$\Leftrightarrow 1 + \tan x + \cot x + \tan x.\cot x - 2 = \dfrac{1}{\sin x.\cos x}$

$\Leftrightarrow 1 + \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} + 1 - 2 = \dfrac{1}{\sin x.\cos x}$

(do $\tan x.\cot x = 1$)

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x.\cos x} - \dfrac{1}{\sin x.\cos x} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin x.\cos x} - \dfrac{1}{\sin x.\cos x} = 0$

(do $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

$\Leftrightarrow 0 = 0$ (luôn đúng)

Ví dụ 6: Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào số đo của góc nhọn α

a) $\cos^2 \alpha.\cos\beta^2 + \cos^2 \alpha.\sin\beta^2 + \sin^2 \alpha$

b) $2\left(\sin\alpha - \cos\alpha\right)^2 - \left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)^2 + 6\sin\alpha.\cos\alpha$

c) $\left(\tan\alpha - \cot\alpha\right)^2 - \left(\tan\alpha + \cot\alpha\right)^2$

Bài giải:

a) $\cos^2\alpha.\cos\beta^2 + \cos^2\alpha.\sin\beta^2 + \sin^2\alpha$

$= \cos^2\alpha.\left(\cos\beta^2 + \sin\beta^2\right) + \sin^2\alpha \quad (\text{do } \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1)$

$= \cos^2\alpha.1 + \sin^2\alpha \quad (\text{do } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1)$

$= 1$

b) $2\left(\sin\alpha - \cos\alpha\right)^2 - \left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)^2 + 6\sin\alpha.\cos\alpha$

$= 2\left(\sin^2\alpha - 2\sin\alpha.\cos\alpha + \cos^2\alpha\right) - \left(\sin^2\alpha + 2\sin\alpha.\cos\alpha + \cos^2\alpha\right) + 6\sin\alpha.\cos\alpha$

$= 2\sin^2\alpha - 4\sin\alpha.\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 2\sin\alpha.\cos\alpha - \cos^2\alpha + 6\sin\alpha.\cos\alpha$

$= \left(2\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + \left(2\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\right) + \left(-4\sin\alpha.\cos\alpha - 2\sin\alpha.\cos\alpha + 6\sin\alpha.\cos\alpha\right)$

$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \quad (\text{do } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1)$

= 1.

c) $\left(\tan\alpha - \cot\alpha\right)^2 - \left(\tan\alpha + \cot\alpha\right)^2$

$= \left[\left(\tan\alpha - \cot\alpha\right) + \left(\tan\alpha + \cot\alpha\right)\right].\left[\left(\tan\alpha - \cot\alpha\right) - \left(\tan\alpha + \cot\alpha\right)\right]$

$= \left(\tan\alpha - \cot\alpha + \tan\alpha + \cot\alpha\right)\left(\tan\alpha - \cot\alpha - \tan\alpha - \cot\alpha\right)$

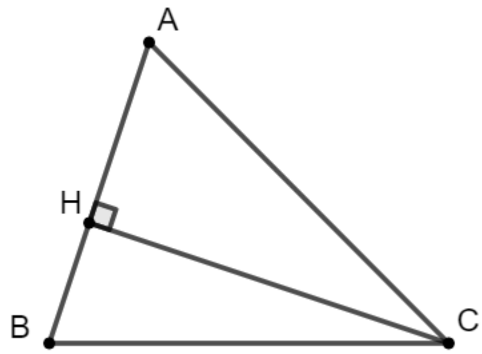
$= 2\tan\alpha.(-2\cot\alpha)$

$= -4\tan\alpha.\cot\alpha \quad (\text{ do } \tan\alpha.\cot\alpha = 1)$

$= -4.1 = -4$

Ví dụ 7: Chứng minh định lý sin: Trong tam giác nhọn, độ dài các cạnh tỉ lệ với sin của các góc đối diện: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

Bài giải:



Vẽ đường cao CH

+) Xét $\triangle AHC$ vuông tại H có: $\sin A = \frac{CH}{AC}$

+) Xét $\triangle AHB$ vuông tại H có: $\sin B = \frac{CH}{BC}$

$\Rightarrow \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{CH}{AC} : \frac{CH}{BC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$

Suy ra: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

Chứng minh tương tự: $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Vậy $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.