Chủ đề: Đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp

Dạng 2: Tính toán các đại lượng liên quan đến đa giác nội tiếp, đa giác ngoại tiếp đường tròn

A. Phương pháp giải

+ Đa giác ngoại tiếp đường tròn là

Nắm vững các kiến thức liên quan đến đa giác nội tiếp, đa giác ngoại tiếp đường tròn.

+ Các công thức tính diện tích tam giác, hình thang, hình chữ nhật, hình vuông,…

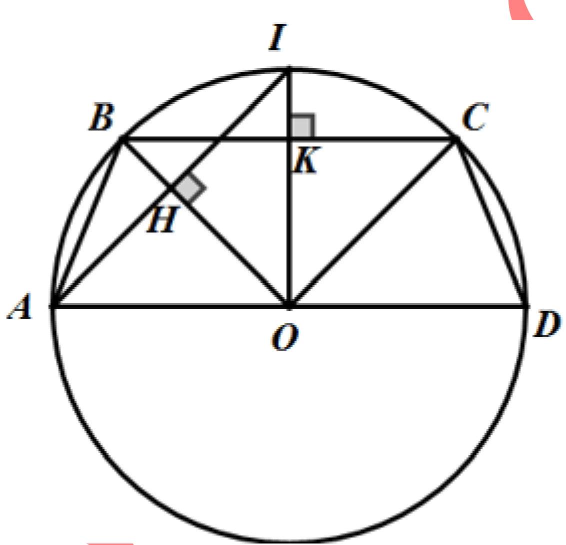
B. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trên đường tròn (O; R) lần lượt đặt theo cùng một chiều kể từ điểm A, cung AB = 45^o , cung BC = 90^o , cung CD = 45^o .

a) Tứ giác ABCD là hình gì? Vì sao?

b) Tính chu vi và diện tích tứ giác ABCD theo R.

Hướng dẫn giải



Ta có $sđ\,AD = sđ\,AB + sđ\,BC + sđ\,CD = 45° + 90° + 45° = 180°$

$\Rightarrow$ A, O, D thẳng hàng.

Vì $sđ\,BC = 90° \Rightarrow BOC = 90°$ suy ra ΔBOC vuông cân ở O nên: $OBC = 45°$

Mà $BOA = 45°$ (góc ở tâm chắn cung AB)

$\Rightarrow BOA = OBC$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong, suy ra BC // AD (1)

Lại có: $sđBD = sđAC = 90° + 45° = 135° \Rightarrow BD = AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABCD là hình thang cân.

b) Vì tam giác BOC vuông cân tại O nên: $BC^2 = OB^2 + OC^2 = 2R^2$

$\Rightarrow BC = \sqrt{2}R$

Gọi I là điểm chính giữa của cung BC, nối AI cắt OB tại H.

Dễ thấy ΔAHO vuông cân tại H, có $OA = R \Rightarrow AH = \frac{R\sqrt{2}}{2} = HO$

Do đó: $BH = OB - OH = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}R$

Xét ΔABH vuông tại H nên:

$AB^2 = AH^2 + BH^2$

$\Rightarrow AB = \sqrt{2-\sqrt{2}}R$, do đó $CD = \sqrt{2-\sqrt{2}}R$

Vậy chu vi hình thang ABCD là:

AB+BC+CD+DA=$\sqrt{2-\sqrt{2}}R + \sqrt{2}R + 2R$

Dễ thấy: $S_{\Delta ABO} = S_{\Delta CDO} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4}$ và $S_{\Delta CBO} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4}$

Do đó diện tích của hình thang ABCD là:

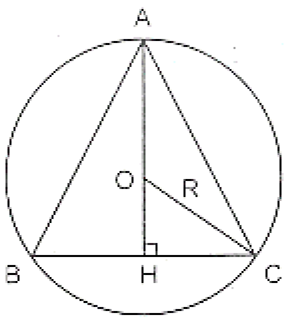
$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABO} + S_{\Delta BOC} = 2\frac{R^2\sqrt{2}}{4} + \frac{R^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)R^2}{2}.$$

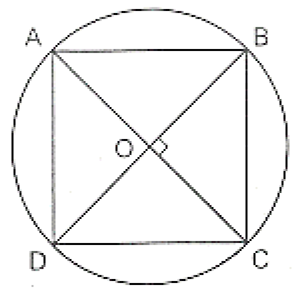
Ví dụ 2: Một tam giác đều, một hình vuông và một hình lục giác đều cùng nội tiếp đường tròn (O ; R).

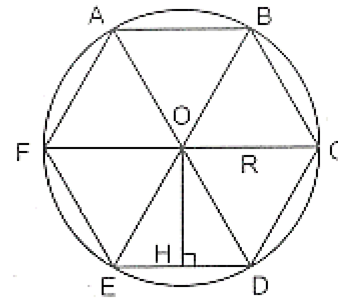
a) Tính độ dài mỗi cạnh của các hình trên theo R.

b) Chứng tỏ rằng bán kính của đường tròn nội tiếp lục giác đều bằng một nửa cạnh của tam giác đều.

Hướng dẫn giải







a) Xét tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). (h.a)

Kẻ đường cao AH, ta có $HC = R\sin 60^\circ = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Do đó BC = 2HC = $BC = 2HC = R\sqrt{3}$

– Xét hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O ; R). (h.b)

ΔBOC vuông cân nên $BC = R\sqrt{2}$.

– Xét lục giác đều ABCDEF nội tiếp đường tròn (O ; R). (h.c)

ΔBOC đều nên BC = R.

b) Kẻ OH ⊥ DE (h.c), OH là bán kính của đường tròn nội tiếp lục giác đều.

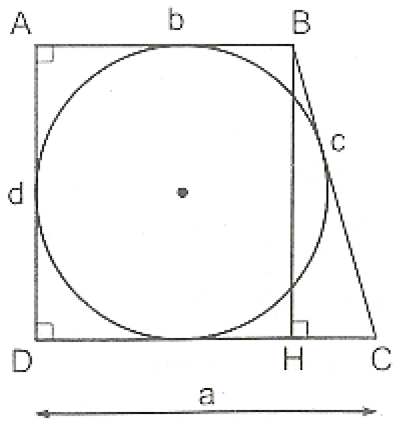
Ta có $OH = OD\sin 60^\circ = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn (O ; R) bằng $R\sqrt{3}$, do đó bán kính của đường tròn nội tiếp lục giác đều bằng nửa cạnh của tam giác đều.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng diện tích của một hình thang vuông ngoại tiếp một đường tròn bằng tích của hai cạnh đáy.

Hướng dẫn giải

Xét hình thang ABCD ngoại tiếp đường tròn (O), $A = D = 90^\circ$.



Đặt CD = a, AB = b, BC = c, AD = d.

Kẻ BH ⊥ CD.

Trong tam giác vuông BHC ta có:

$BH^2 + HC^2 = BC^2$ nên $d^2 + (a-b)^2 = c^2$ (1)

Do ABCD là tứ giác ngoại tiếp nên a + b = c + d

$\Rightarrow$ c = a + b – d, do đó $c^2 = (a+b-d)^2$

Từ (1) và (2) suy ra $d^2 + (a-b)^2 = (a+b-d)^2$

$\Rightarrow d^2 + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + d^2 + 2ab - 2ad - 2bd$

$\Leftrightarrow 2d(a+b) = 4ab$

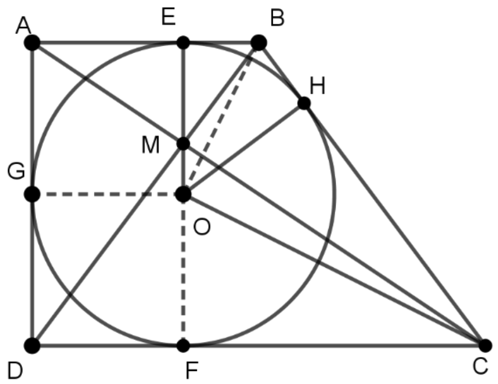
$\Leftrightarrow \dfrac{d(a+b)}{2} = ab$

$\Leftrightarrow S_{ABCD} = ab$

Vậy diện tích hình thang vuông ngoại tiếp một đường tròn bằng tích của hai cạnh đáy.

Ví dụ 4: Cho hình thang vuông ABCD có AB là cạnh đáy nhỏ, CD là cạnh đáy lớn. M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Biết rằng hình thang ABCD ngoại tiếp đường tròn bán kính R. Tính diện tích tam giác ADM.

Hướng dẫn giải



Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp hình thang vuông ABCD. E, F, G, H lần lượt là các tiếp điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp các cạnh AB, CD, AD, BC. Gọi M là giao điểm của AC và BD.

Giả sử $A = D = 90°$.

Ta có OB là phân giác của EOH (tính chất hai tiếp tuyến AB và BC cắt nhau)

$\Rightarrow EOB = HOB = \dfrac{EOH}{2}$ (1)

OC là phân giác của FMH (tính chất hai tiếp tuyến CD và BC cắt nhau)

$\Rightarrow HOC = FOC = \dfrac{FOH}{2}$ (2)

Mà $EOH + FOH = 180°$ (hai góc kề bù) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $BOC = BOH + COH = 90°$

Xét ΔBOC vuông tại O, có $OH \perp BC$: $OH^2 = BH.CH$

Ta xét tứ giác AEFD có : $A = D = F = 90°$

$\Rightarrow$ AEFD là hình chữ nhật

$\Rightarrow AE = DF = OE = OH$.

Ta có : EB = BH, CF = CH (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow OH^2 = BH.CH \Leftrightarrow AE.DF = BE.CF \Leftrightarrow \dfrac{AE}{CF} = \dfrac{BE}{AE}$

Do đó M nằm trên đoạn EF.

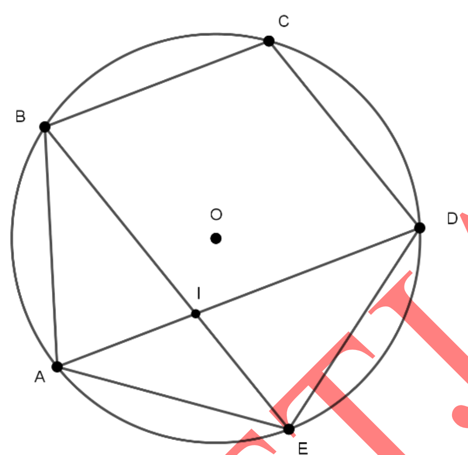
Đường cao ứng với đỉnh M của ΔADM có độ dài R và cạnh đáy là 2R. Suy ra $S_{\Delta ADM} = R^2$.

Vì diện tích các tam giác ADM và BCM bằng nhau, nên trong trường hợp $B = C = 90°$, ta cũng có $S_{\Delta BCM} = R^2$.

Ví dụ 5: Cho ngũ giác đều ABCDE. Gọi I là giao điểm của AD và BE. Hệ thức nào sau đây đúng. Chứng minh $AE^2 = AI.AD$

Hướng dẫn giải

Vẽ đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đều ABCDE.



Ta có: AEB là góc nội tiếp chắn cung AB

ADE là góc nội tiếp chắn cung AE

Mà $AE = AB$

$\Rightarrow AEB = ADE$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Xét ΔAEI và ΔADE, có:

EAI : góc chung

$AEB = ADE$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AEI \sim \Delta ADE(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{AI}{AE} = \dfrac{AE}{AD} \Leftrightarrow AE^2 = AI.AD$.

C. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Xét các câu sau đây:

(1) Nếu qua bốn đỉnh của một tứ giác có một đường tròn thì tứ giác đó gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn.

(2) Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc dối diện nhau bằng 1 góc vuông.

(3) Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 1 góc vuông thì tứ giác đó nội tiếp được một đường tròn.

(4) Nếu hai đỉnh P, Q liên tiếp cùng nhìn đoạn thẳng MN dưới cùng một góc thì tứ giác MNPQ nội tiếp.

Trong các câu trên:

A. Chỉ có 1 câu đúng

B. Chỉ có 2 câu đúng

C. Chỉ có 3 câu đúng

D. Không có câu nào sai

Hướng dẫn giải

Đáp án B

Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc dối diện nhau bằng $180°$

Và một tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng $180°$ thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.

Nên (2) và (3) sai.

Câu 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O (AB<AC). Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Tia AO cắt đường tròn tại D.

Xác định câu sai trong các câu sau

A. Tứ giác BHCD là hình bình hành

B. Tứ giác BFEC nội tiếp được đường tròn

C. $FEC = FBC$

D. Tứ giác BHCD không nội tiếp được đường tròn.

Hướng dẫn giải

Đáp án C

+ Ta có: A, O, D thẳng hàng nên AD là đường kính. Dó đó $ACD = ABD = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AC \perp CD,\ AB \perp BD$

Mà $BE \perp AC, CF \perp AB$

$\Rightarrow BH \parallel CD$ (cùng vuông góc với AC)

Và $CH \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow$ BHCD là hình bình hành. Suy ra A đúng.

+ Ta có $BFC = BEC = 90°$

$\Rightarrow$ E, F là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn BC dưới một góc $90°$ nên BFEC nội tiếp. Suy ra B đúng.

+ Do BFEC nội tiếp nên $FEC + FBD = 180°$. Suy ra C sai.

+ Do BHCD là hình bình hành nên không nội tiếp đường tròn. Suy ra D đúng.

Câu 3: Cho tam giác đều ABC và M là điểm thuộc cung BC (không chứa A) của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Nếu cho MB = 60cm và MC = 90cm thì MA sẽ bằng:

A. 150cm

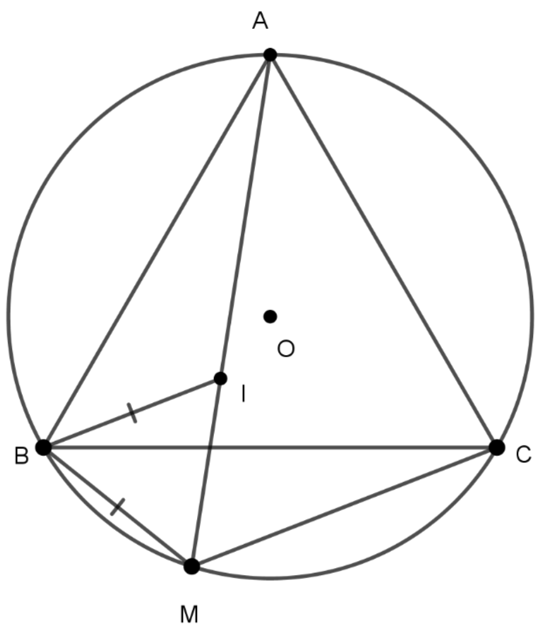
B. 210cm

C. 30cm

D. 75cm

Hướng dẫn giải

Đáp án A



Trên MA lấy điểm I sao cho BM = BI.

$\Rightarrow \Delta BMI$ cân tại B

Mà $BMI = BCA = 60°$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AB)

$\Rightarrow \Delta BMI$ đều

$\Rightarrow IM = BM$ (1)

Ta lại có:

$ABI + IBC = ABC = 60°$ (ΔABC đều)

$IBC + CBM = IBM = 60°$ (ΔMBI đều)

$\Rightarrow ABI = CBM$

Xét ΔAIB và ΔCMB, ta có:

$BAI = BCM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn BM)

AB = BC (ΔABC đều)

$ABI = CBM$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AIB = \Delta CMB (g - c - g)$

$\Rightarrow AI = CM$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $MA = MB + MC = 60 + 90 = 150cm$

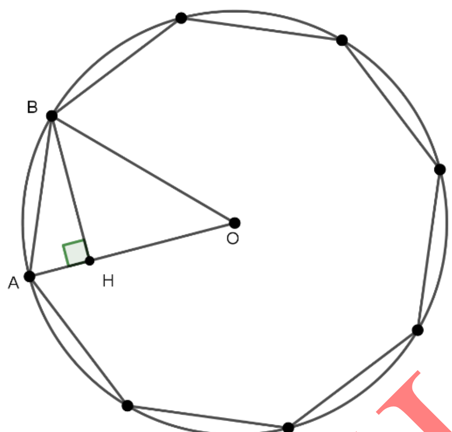
Vậy MA = 150 cm.

Câu 4: Tính diện tích của hình 8 cạnh đều nội tiếp trong một đường tròn tâm O, bán kính R.

A. R^2 B. $2R^2$ C. $2\sqrt{2}R^2$ D. $\sqrt{2}R^2$

Hướng dẫn giải

Đáp án C



Ta có $AOB = \frac{360°}{8} = 45°$

Từ B kẻ BH ⊥ OA

$\Rightarrow \Delta OBH$ vuông cân tại H, ta có: $OB^2 = OH^2 + BH^2$

$\Leftrightarrow R^2 = OH^2 + OH^2$

$\Leftrightarrow 2OH^2 = R^2$

$\Leftrightarrow OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow BH = OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Diện tích tam giác OAB là: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.BH = \frac{1}{2}.R.\frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4}$

Gọi S là diện tích của hình 8 cạnh đều, khi đó: $S = 8S_{\Delta OAB} = 8.\frac{R^2\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}R^2$.

Câu 5: Tính số cạnh của một đa giác đều nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R, biết độ dài cạnh AB của nó bằng R.

A. 4 B. 5 C. 6 D. 8

Hướng dẫn giải

Đáp án C

Áp dụng công thức: $R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$

Ta có: $a = R \Rightarrow R = \frac{R}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{180^\circ}{n} = 1$

$\Leftrightarrow \sin\frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{180^\circ}{n} = 30^\circ$

$\Leftrightarrow n = \frac{180^\circ}{30^\circ} = 6$

Vậy đa giác đều có sáu cạnh.