

## Dạng 2: Diện tích các hình liên quan đến diện tích hình tròn, diện tích hình quạt tròn.

### A. Phương pháp giải

Sử dụng linh hoạt các kiến thức đã học về góc ở tâm, bán kính đường tròn. Từ đó sử dụng các công thức tính diện tích hình tròn và quạt tròn để tính diện tích hình cần tìm.

Áp dụng các công thức:

+ Công thức tính diện tích hình tròn:  $S = \pi R^2$

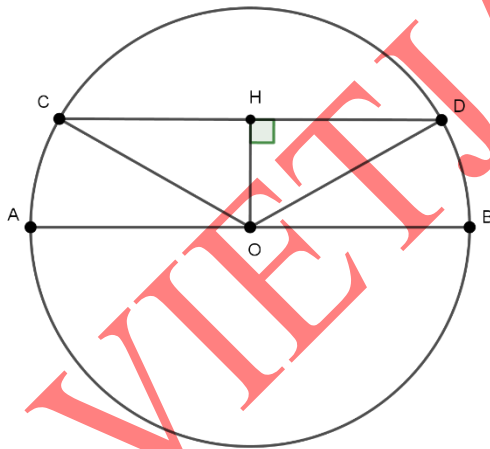
+ Công thức tính diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung  $n^\circ$ :

$$S = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot n}{360^\circ} \text{ hay } S = \frac{lR}{2}.$$

### B. Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Một đám cỏ hình tròn có đường kính 12m, bị cắt thành một lối đi thẳng rộng 3m để lát sỏi. Một cạnh của lối đi này là đường kính của đám cỏ. Tìm diện tích đám cỏ còn lại.

#### Hướng dẫn giải



Ta có các dây AB, CD tạo thành lối đi

Vì  $AB \parallel CD \Rightarrow AC = DB \Rightarrow \angle AOC = \angle BOD$

OH là bề rộng của lối đi nên  $OH = 3\text{m}$ .

Đường kính đường tròn là 12m, nên bán kính là 6m

Xét  $\triangle OHC$  vuông tại H, ta có:

$$\cos HOC = \frac{OH}{OC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow HOC = 60^\circ \Rightarrow AOC = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \sin HOC = \frac{CH}{OC} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CH}{6} \Leftrightarrow CH = 3\sqrt{3} \Rightarrow CD = 2CH = 6\sqrt{3}$$

Diện tích  $\triangle COD$  là:  $S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} CD \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3}$

Diện tích hình quạt AOC là:  $S_{AOC} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 30}{360} = 3\pi (m^2)$

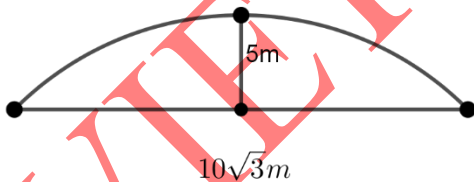
$$\Rightarrow S_{BOD} = S_{AOC} = 3\pi (m^2)$$

Diện tích lối đi:  $S_1 = S_{\triangle COD} + S_{AOC} + S_{BOD} = 9\sqrt{3} + 3\pi + 3\pi = 9\sqrt{3} + 6\pi (m^2)$ .

Diện tích hình tròn là:  $S_2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi (m^2)$

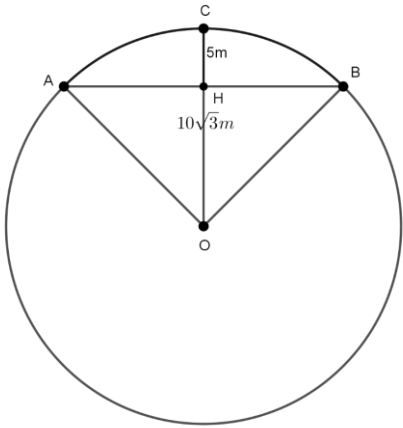
Diện tích đám cỏ còn lại là:  $S = S_2 - S_1 = 36\pi - 9\sqrt{3} - 6\pi = 30\pi - 9\sqrt{3} (m^2)$ .

**Ví dụ 2:** Một đường hầm có mặt cắt vuông góc là một phần đường tròn như hình bên. Mặt cắt này có chiều cao lớn nhất là 5m, chiều rộng  $10\sqrt{3}m$ . Tính diện tích mặt cắt của đường hầm.



### Hướng dẫn giải

Vẽ đường tròn tâm O, bán kính R chứa phần đường tròn trên



Gọi AB là dây cung tương ứng với chiều rộng của mặt cắt đường hầm, C là điểm trên cung nhỏ AB sao cho  $OC \perp AB$ , H là giao điểm của AB và OC. Khi đó, ta có: H là trung điểm của AB.

$$\Rightarrow AB = 10\sqrt{3}m, CH = 5m, AH = BH = 5\sqrt{3}m$$

$$\Rightarrow OH = CO - CH = R - 5(m)$$

Xét  $\triangle OAH$  vuông tại H, có:  $OA^2 = OH^2 + AH^2$  (định lý Py - ta - go)

$$\Leftrightarrow R^2 = (R - 5)^2 + (5\sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 = R^2 - 10R + 25 + 75$$

$$\Leftrightarrow -10R = -100$$

$$\Leftrightarrow R = 10(m)$$

$$\Rightarrow OH = 5(m)$$

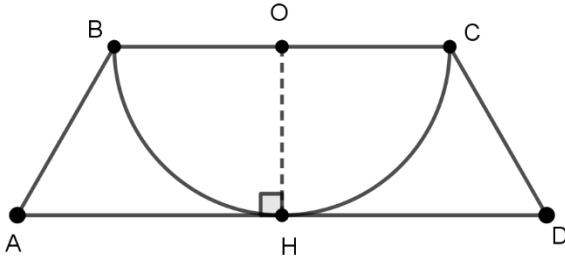
$$\text{Ta lại có: } \sin HOA = \frac{HA}{OA} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HOA = 60^\circ \Rightarrow AOB = 120^\circ$$

$$\text{Diện tích hình quạt AOB là: } S_1 = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 120}{360} = \frac{100\pi}{3} (m^2)$$

$$\text{Diện tích tam giác AOB là: } S_2 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 5 = 25\sqrt{3} (m^2)$$

$$\text{Khi đó diện tích mặt cắt hầm là: } S = S_1 - S_2 = \frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3} (m^2)$$

**Ví dụ 3:** Cho hình thang ABCD ( $AD \parallel BC$ ) có:  $A = D = 60^\circ$  và  $AD = 4\text{cm}$ . Cạnh BC là đường kính của nửa đường tròn nội tiếp (như hình vẽ). Tính diện tích phần nằm trong hình thang và nằm ngoài nửa hình tròn.



### Hướng dẫn giải

Từ B hạ  $BK \perp AD$ , đặt  $AK = x$

Xét  $\triangle ABK$  vuông tại K, ta có:

$$\tan BAK = \frac{BK}{AK} \Leftrightarrow \tan 60^\circ = \frac{BK}{x} \Leftrightarrow BK = \sqrt{3}x \Rightarrow OH = \sqrt{3}x$$

Vì H thuộc nửa đường tròn đường kính BC

$$\Rightarrow BC = 2OH = 2\sqrt{3}x$$

$$\text{Mà } AD = 2AH + BC = 2x + 2\sqrt{3}x = (2 + 2\sqrt{3})x = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} - 1$$

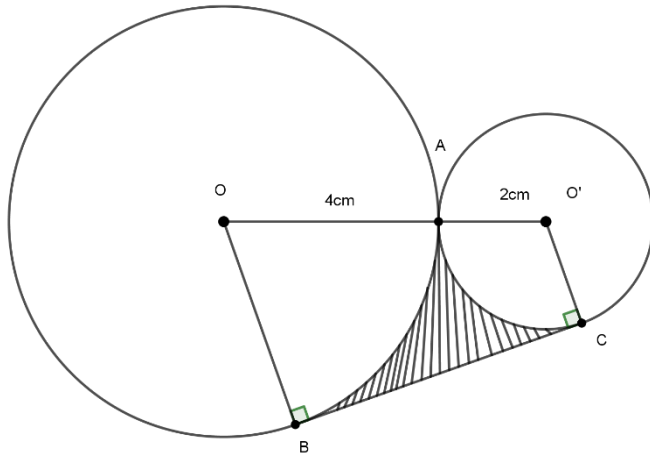
$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = 6 - 2\sqrt{3}, OH = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = 3 - \sqrt{3}$$

$$\text{Diện tích hình thang ABCD là: } S_1 = \frac{(4 + 6 - 2\sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{2} = 18 - 8\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Diện tích nửa hình tròn đường kính BC là: } S_2 = \frac{1}{2}\pi(3 - \sqrt{3})^2 = (6 - 3\sqrt{3})\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Diện tích hình cần tìm là: } S_1 - S_2 = 18 - 8\sqrt{3} - (6 - 3\sqrt{3})\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

**Ví dụ 4:** Cho hai đường tròn ( $O; 4\text{cm}$ ) và ( $O'; 2\text{cm}$ ) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc ( $O$ ) tại B và ( $O'$ ) tại C. Tính diện tích phần gạch sọc biết  $BC = 5\text{cm}$  và  $AOB = 60^\circ$



### Hướng dẫn giải

Diện tích hình thang  $OO'CB$  là:  $S_1 = \frac{(OB + O'C).BC}{2} = \frac{(4 + 2).5}{2} = 15 (cm^2)$

Diện tích hình quạt  $OAB$  là:  $S_2 = \frac{\pi.4^2.60}{360} = \frac{8}{3}\pi (cm^2)$

Vì  $O'C \parallel OB \Rightarrow \angle AOB + \angle AO'C = 180^\circ$  (hai góc trong cùng phía bù nhau)

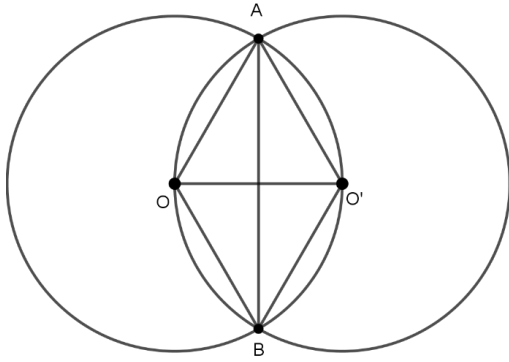
$\Rightarrow \angle AO'C = 120^\circ$

Diện tích hình quạt  $AO'C$  là:  $S_3 = \frac{\pi.2^2.120}{360} = \frac{4}{3}\pi (cm^2)$

Diện tích phần gạch sọc:  $S = S_1 - S_2 - S_3 = 15 - \frac{8}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi = 15 - 4\pi (cm^2)$

**Ví dụ 5:** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Tâm  $O$  nằm trên đường tròn  $(O')$  và tâm  $O'$  nằm trên đường tròn  $(O)$ . Biết  $AB = 2\sqrt{3}$  cm. Tìm diện tích phần giao của hai đường tròn.

### Hướng dẫn giải



Ta có:  $OA = OB = OO' = O'A = O'B$

$\Rightarrow$  (O) và (O') bằng nhau,  $\Delta OAO', \Delta OBO'$  đều

$\Rightarrow AO'O = AOO' = BO'O = BOO' = 60^\circ \Rightarrow AO'B = AOB = 120^\circ$

Gọi H là giao điểm của  $OO'$  với AB

$\Rightarrow AHO = 90^\circ$  và  $AH = BH = \sqrt{3}cm$

Xét tam giác AHO vuông tại H, ta có:

$$+ \sin AOH = \frac{AH}{OA} \Leftrightarrow \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{OA} \Leftrightarrow OA = 2cm$$

$$+ \tan AOH = \frac{AH}{OH} \Leftrightarrow \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{OH} \Leftrightarrow OH = 1cm$$

$$\text{Diện tích hình quạt } AO'B \text{ là: } S_1 = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot n}{360} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 120}{360} = \frac{4}{3}\pi (cm^2)$$

$$\text{Diện tích hình tam giác } AOB \text{ là: } S_2 = \frac{1}{2} AB \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3} (cm^2)$$

$$\text{Diện tích cần tìm là: } S = 2(S_1 - S_2) = 2 \cdot \left( \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} (cm^2).$$