

## Chủ đề: Độ dài đường tròn, cung tròn

### Dạng 2: Tính số đo cung do nhiều cung tạo thành và so sánh độ dài của hai cung

#### A. Phương pháp giải

- + Tính số đo cung do nhiều cung tạo thành
- Tính từng số đo cung nhỏ
- Sau đó cộng các số đo cung nhỏ lại ta được số đo cung lớn
- + So sánh độ dài của hai cung
- Tính toán độ dài của cung sau đó so sánh
- + Sử dụng các công thức sau để tính độ dài đường tròn và cung tròn:
  - Độ dài đường tròn:  $C = 2\pi R$  hoặc  $C = \pi d$

Trong đó:  $C$  là độ dài đường tròn.

$R$  là bán kính đường tròn.

$d$  là đường kính của đường tròn

- Độ dài cung tròn  $n^\circ$  là:  $l = \frac{\pi R n}{180}$

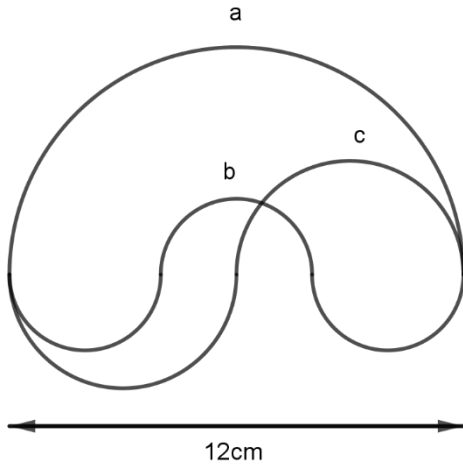
Trong đó:  $l$  là độ dài cung tròn  $n^\circ$ .

$R$  là bán kính đường tròn.

$n$  là số đo độ của góc ở tâm.

#### B. Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Hãy so sánh độ dài ba đường cong a,b,c trong hình sau:

**Lời giải:**

Đường cong a là nửa đường tròn đường kính 12cm nên có độ dài là:

$$l_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 12 = 6\pi (cm)$$

Đường cong b gồm ba nửa đường tròn đường kính 4cm nên có độ dài là:

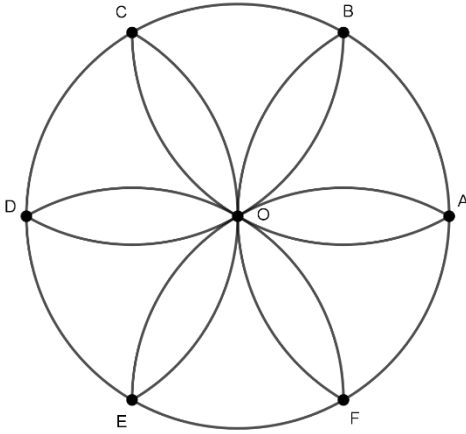
$$l_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4 = 6\pi (cm)$$

Đường cong c gồm hai nửa đường tròn đường kính 6cm nên có độ dài là:

$$l_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 6 = 6\pi (cm)$$

Vậy ba đường cong có độ dài bằng nhau

**Ví dụ 2:** Tính chu vi của hình cánh hoa, biết  $OA = R$



### Hướng dẫn giải

Theo hình vẽ ta có:  $AB = BC = DC = DE = FE = FA$

$$\Rightarrow AC = CE = EA$$

Mà  $sđAC + sđCE + sđEA = 360^\circ$

$$\Rightarrow sđAC = sđCE = sđEA = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow AOC = 120^\circ \text{ (góc ở tâm chắn } AC)$$

Ta có 12 cung đơn tạo nên cánh hoa đó hay 6 cung kép tạo nên cánh hoa đó

Xét một cung kép  $AOC$  là cung của đường tròn tâm B, bán kính R với góc ở tâm là  $120^\circ$ .

Do đó, độ dài cung  $AOC$  là:  $l = \frac{\pi \cdot R \cdot 120}{180} = \frac{2}{3} \pi R$

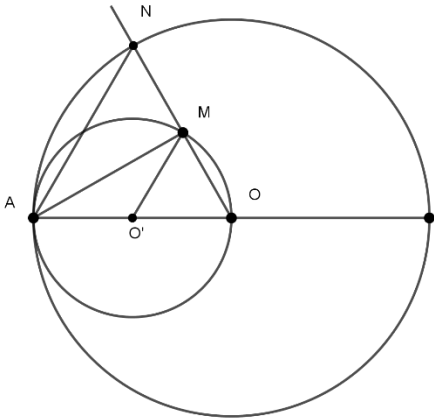
Chu vi cánh hoa sẽ bằng 6 lần độ dài cung  $AOC$ :  $C = 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R = 4\pi R$ .

**Ví dụ 3:** Cho đường tròn tâm O, bán kính CA. Vẽ đường tròn đường kính OA, tâm O'.

a) Chứng minh (O) và (O') tiếp xúc nhau.

b) M là một điểm nằm trên đường tròn (O'), tia OM cắt đường tròn (O) tại N. So sánh độ dài hai cung AM và AN tương ứng của hai đường tròn.

### Hướng dẫn giải



a) Ta có:  $OO' = R - R'$ .

Mà O, O', A thẳng hàng suy ra hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc với nhau tại A

Xét (O'), ta có :

Đặt  $\angle AON = \alpha$

$\angle AON$  là góc nội tiếp chắn cung AM

$\angle AO'M$  là góc ở tâm chắn cung AM

$\Rightarrow \angle AO'M = 2\alpha$

Độ dài cung AN là:  $l_1 = \frac{\pi \cdot R \cdot \alpha}{180}$

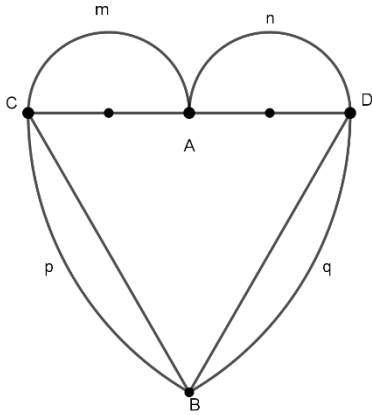
Độ dài cung AM là:  $l_2 = \frac{\pi \cdot R' \cdot 2\alpha}{180} = \frac{\pi \cdot \frac{R}{2} \cdot 2\alpha}{180} = \frac{\pi \cdot R \cdot \alpha}{180}$

$\Rightarrow l_1 = l_2$  hay độ dài cung AM bằng độ dài cung AN.

Vậy độ dài hai cung AM bằng độ dài cung AN.

### C. Bài tập trắc nghiệm

**Câu 1:** Cho hình vẽ sau, biết  $CD = 10\text{cm}$  và tam giác  $BCD$  đều,  $A$  là trung điểm  $CD$ . Tính chu vi hình quả tim



A.  $\frac{5}{2}\pi \text{ cm}$

B.  $\frac{10}{3}\pi \text{ cm}$

C.  $\frac{35}{3}\pi \text{ cm}$

D.

$\frac{35}{6}\pi \text{ cm}$

### Hướng dẫn giải

Đáp án C

+ Do  $A$  là trung điểm của  $CD$

$$\Rightarrow CA = AD = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5\text{cm}$$

$CmA, AnD$  là các nửa đường tròn đường kính  $AC, AD$

Độ dài  $CmA$  bằng độ dài  $AnD$  bằng:  $l_1 = \frac{\pi \cdot \frac{5}{2} \cdot 180}{180} = \frac{5}{2}\pi \text{ (cm)}$

+ Cung  $CpB, DqB$  lần lượt là các cung thuộc đường tròn tâm  $C, D$  với bán kính là  $CD$ .

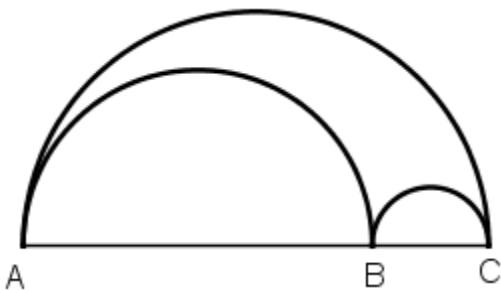
Vì tam giác  $BCD$  đều

$$\Rightarrow \angle CDB = 60^\circ$$

Khi đó, độ dài cung  $CpB$  bằng độ dài cung  $AnD$  là:  $l_2 = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 60}{180} = \frac{10}{3} \pi$  (cm)

Khi đó chu vi hình trái tim là:  $C = 2l_1 + 2l_2 = 2(l_1 + l_2) = 2\left(\frac{5}{2} \pi + \frac{10}{3} \pi\right) = \frac{35}{3} \pi$  (cm).

**Câu 2:** Cho hình vẽ sau. Gọi  $C_1$  là độ dài cung  $AC$ ,  $C_2$  là độ dài cung  $AB$ ,  $C_3$  là độ dài cung  $BC$  nhận xét nào sau đây đúng?



- A.  $C_2 + C_3 = C_1$       B.  $C_2 - C_3 = C_1$       C.  $C_2 = C_3 = C_1$       D.  $C_2 + C_3 = 2C_1$

### Hướng dẫn giải

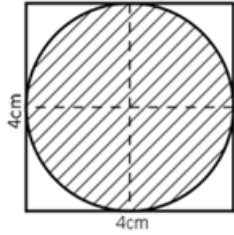
Đáp án A

$C_1, C_2, C_3$  lần lượt là độ dài của các nửa đường tròn đường kính  $AC, AB, BC$ , ta có:

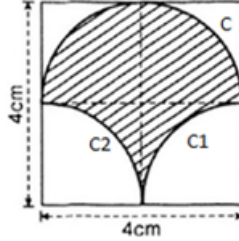
$$C_1 = \frac{1}{2} \pi AC; C_2 = \frac{1}{2} \pi AB; C_3 = \frac{1}{2} \pi BC.$$

$$\text{Nhận thấy } C_2 + C_3 = \frac{1}{2} \pi AB + \frac{1}{2} \pi BC = \frac{1}{2} \pi (AB + BC) = \frac{1}{2} \pi AC = C_1.$$

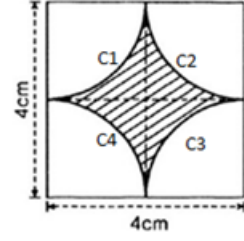
**Câu 3:** Trong các hình dưới đây, hình nào có chu vi lớn nhất:



Hình 1



Hình 2



Hình 3

A. Hình 1  
hình nào

B. Hình 2

C. Hình 3

D. Không có

### Hướng dẫn giải

Đáp án D

- Hình 1:

Phần gạch chéo là đường tròn đường kính  $d = 4\text{cm}$

$\Rightarrow$  Chu vi của hình là:  $C = \pi \cdot d = 4\pi \approx 12,57 \text{ (cm)}$

- Hình 2:

Chu vi gồm nửa đường tròn  $C$ ; cung tròn  $C_1$  và cung tròn  $C_2$ .

+  $C$  là nửa đường tròn đường kính  $d = 4\text{cm}$

$\Rightarrow C = \pi \cdot d / 2 = 2\pi \text{ (cm)}$

+  $C_1$  và  $C_2$  là  $\frac{1}{4}$  đường tròn bán kính  $R = 2\text{cm}$

$\Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = \pi \text{ (cm)}$

Vậy chu vi phần gạch chéo bằng:

$C + C_1 + C_2 = 2\pi + \pi + \pi = 4\pi \approx 12,57 \text{ (cm)}$

- Hình 3:

Chu vi cần tính là 4 cung tròn  $C_1$ ;  $C_2$ ;  $C_3$ ;  $C_4$ .

$C_1$ ;  $C_2$ ;  $C_3$ ;  $C_4$  đều là  $\frac{1}{4}$  đường tròn bán kính  $R = 2\text{cm}$ .

$$\Rightarrow C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = \pi$$

$\Rightarrow$  Chu vi phân hình gạch chéo:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 4\pi \approx 12,57 \text{ (cm)}.$$

**Câu 4:** Cho hình vuông ABCD cạnh a. Lấy các đỉnh làm tâm, vẽ phía trong hình vuông, dựng các cung tròn bán kính a, tạo thành một hình hoa hồng. Tìm chu vi của hình đó.

A.  $\frac{\pi \cdot a}{6}$

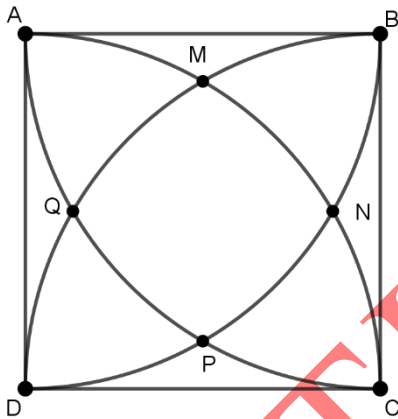
B.  $\frac{4\pi a}{3}$

C.  $\frac{\pi \cdot a}{2}$

D.  $2\pi \cdot a$

### Hướng dẫn giải

Đáp án B



Hình hoa hồng được tạo bởi các cung  $AM, MB, NB, NC, PC, PD, AQ, DQ$ .

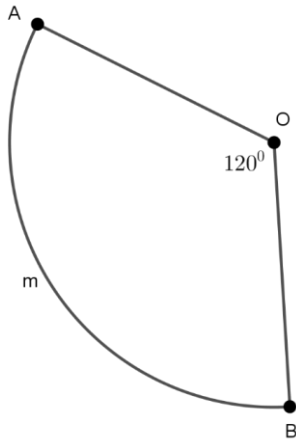
Ta nhận thấy các cung này có chiều dài bằng nhau và có cùng số đo  $30^\circ$

$$\text{Độ dài cung } AM \text{ là: } l = \frac{\pi \cdot a \cdot 30}{180} = \frac{\pi \cdot a}{6}$$

$$\text{Khi đó, chu vi của hình đó là: } 8 \cdot \frac{\pi a}{6} = \frac{4\pi a}{3}.$$

**Câu 5:** Xem hình bên và so sánh độ dài l của cung AmB với độ dài d của đường gấp khúc AOB.



A.  $l > d$ B.  $l = d$ C.  $l < d$ D.  $l = 3d$ **Hướng dẫn giải**

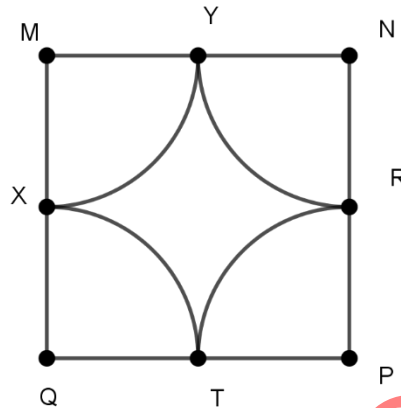
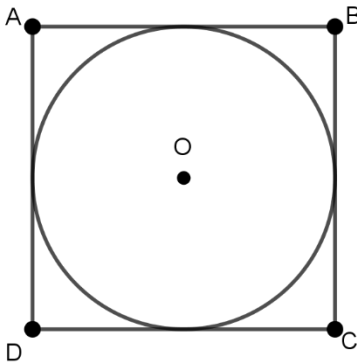
Đáp án A

+ số  $\widehat{AmB} = \widehat{AOB} = 120^\circ$ 

$$\Rightarrow \text{Độ dài cung } \widehat{AmB}: l = \frac{\pi \cdot R \cdot 120}{180} = R \cdot \frac{2\pi}{3}$$
+ Độ dài đường gấp khúc AOB:  $d = AO + OB = 2R$ .+ Ta có:  $\pi > 3 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} > 2 \Rightarrow l > d$ .Vậy độ dài cung  $\widehat{AmB}$  lớn hơn độ dài đường gấp khúc AOB.

**Câu 6:** Cho hai hình vuông ABCD và MNPQ có cạnh a. Gọi  $C_1$  là chu vi của đường tròn tâm O nội tiếp hình vuông ABCD và  $C_2$  là chu vi của hình XYRT.

Nhận xét nào sau đây đúng?



- A.  $C_1 = C_2$   
 B.  $C_1 > C_2$   
 C.  $C_1 < C_2$   
 D.  $C_1 = 2C_2$

### Hướng dẫn giải

Đáp án A

+ Gọi bán kính (O) là R. Khi đó,  $R = \frac{a}{2}$

Ta có chu vi đường tròn (O) là:  $C_1 = 2\pi \cdot \frac{a}{2} = \pi \cdot a$  (1)

+ Hình XYRT được tạo bởi bốn cung XY, YR, RT, TX

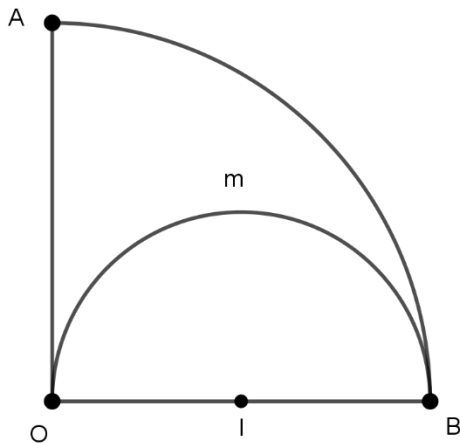
Ta nhận thấy bốn cung XY, YR, RT, TX lần lượt là cung của các đường tròn tâm M, N, P, Q có cùng bán kính là  $\frac{a}{2}$  với góc ở tâm là  $90^\circ$ .

$$\text{Độ dài } XY \text{ là: } l_1 = \frac{\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot 90}{180} = \frac{\pi a}{4}$$

Khi đó chu vi của hình XYRT là:  $C_2 = 4l_1 = 4 \cdot \frac{\pi a}{4} = \pi a$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra :  $C_1 = C_2$  hay chu vi của hai hình là bằng nhau

**Câu 7:** So sánh độ dài cung  $OmB$  với độ dài cung  $AB$



- A.  $l_{OmB} = l_{AB}$                       B.  $l_{OmB} > l_{AB}$   
 C.  $l_{OmB} < l_{AB}$                       D. Không so sánh được

**Hướng dẫn giải**

Đáp án A

Xét đường tròn (O), ta có:  $AOB = 90^\circ$

Khi đó, độ dài cung AB là:  $l_1 = \frac{\pi \cdot OB \cdot 90}{180} = \frac{\pi \cdot OB}{2}$  (1)

Xét đường tròn (I), độ dài cung  $OmB$  là:  $l_2 = \frac{\pi \cdot IB \cdot 180}{180} = \frac{\pi \cdot OB}{2}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra :  $l_1 = l_2$

Vậy độ dài  $OmB$  bằng độ dài  $AB$ .

**Câu 8:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính  $AB = 2R$ . Gọi C là điểm chính giữa cung AB. Vẽ ở miền trong của nửa đường tròn này hai nửa đường tròn đường kính

lần lượt là OB và OC sao cho chúng chỉ có một điểm chung là O. Gọi I là giao điểm của dây BC với nửa đường tròn nhỏ, OI cắt đường tròn lớn tại D. Phát biểu nào dưới đây sai ?

A.  $l_{BO} = l_{BC}$

B.  $l_{BI} = l_{BD}$

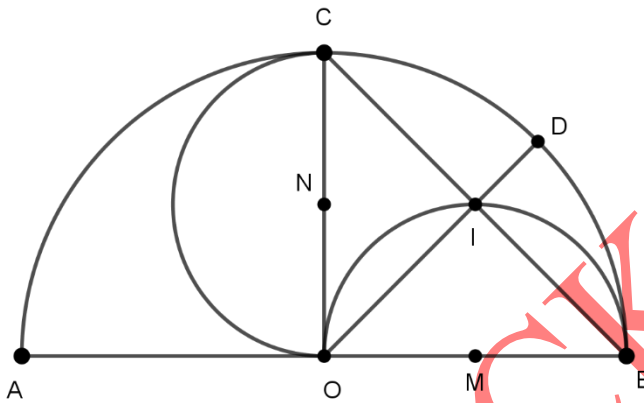
C.  $l_{AC} = l_{BD} + l_{CD}$

D.

$l_{AC} = l_{CD}$

### Hướng dẫn giải

Đáp án D



$$+ \text{Độ dài cung BO là: } l_{BO} = \frac{\pi \cdot \frac{R}{2} \cdot 180}{180} = \frac{\pi R}{2}$$

$$\text{Độ dài cung BC là: } l_{BC} = \frac{\pi \cdot R \cdot 90}{180} = \frac{\pi R}{2}$$

$$\Rightarrow l_{BO} = l_{BC}$$

+ Ta có :  $\angle BCO = \angle IBO = 45^\circ$  nên  $\widehat{BI} = 90^\circ$ ;  $\widehat{BD} = 45^\circ$

$$\text{Độ dài cung BI là: } l_{BI} = \frac{\pi \cdot \frac{R}{2} \cdot 90}{180} = \frac{\pi R}{4}$$

$$\text{Độ dài cung BI là: } l_{BI} = \frac{\pi \cdot R \cdot 45}{180} = \frac{\pi R}{4}$$

$$\Rightarrow l_{BI} = l_{BD}$$

+ Do C là điểm chính giữa cung AB nên  $l_{AC} = l_{BC}$

$$\text{Mà } BC = BD + DC \Rightarrow l_{BC} = l_{BD} + l_{DC}$$

Do đó D sai.

**Câu 9:** Cho đường tròn có bán kính là 650. Người ta tô đỏ một số cung, tổng độ dài các cung được tô là 2015. Tính tổng độ dài các cung chưa được tô.

- A. 4084,07                      B. 2069,07                      C. 2015                      D. 27,03

### Hướng dẫn giải

Đáp án

Độ dài đường tròn bán kính 650 là :  $C = 2\pi \cdot 650 = 4084,07$

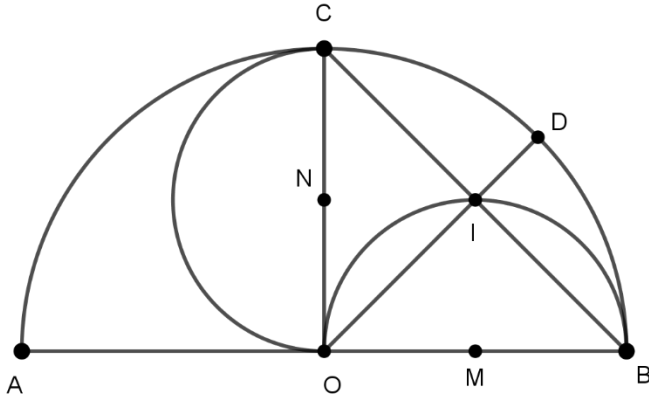
Độ dài các cung chưa được tô là:  $4084,07 - 2015 = 2069,07$ .

**Câu 10:** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính  $AB = 2R$ . Gọi C là điểm chính giữa cung AB. Vẽ ở miền trong của nửa đường tròn này hai nửa đường tròn đường kính lần lượt là OB và OC sao cho chúng chỉ có một điểm chung là O. Gọi I là giao điểm của dây BC với nửa đường tròn nhỏ, OI cắt đường tròn lớn tại D. Chọn đáp án đúng.

- A.  $l_{AB} = l_{OC} + l_{CD}$                       B.  $l_{BC} = l_{AB} - l_{CD}$   
 C.  $l_{AB} = l_{BO} + l_{CO}$                       D.  $l_{AC} = l_{CD}$

### Hướng dẫn giải

Đáp án C



Độ dài cung AB là:  $l_{BA} = \frac{\pi \cdot R \cdot 180}{180} = \pi R$

Độ dài cung BO và CO là:  $l_{BO} = l_{CO} = \frac{\pi \cdot \frac{R}{2} \cdot 180}{180} = \frac{\pi R}{2}$

$\Rightarrow l_{AB} = l_{BO} + l_{CO}.$

Vậy đáp án C đúng.